Questão 1: (2 pontos)

Calcule as seguintes integrais:

(a) (0.5 ponto) $\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx$.

(b) (0.5 ponto) $\int \operatorname{arctg} x dx$.

(c) (0.5 ponto) $\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2} dx$.

(d) (0.5 ponto) $\int_0^1 \ln x dx$.

Solução:

(a) Fazendo a seguinte substituição

$$u = \cos x,$$

obtemos

$$\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx = -\int e^u du = -e^u + c.$$

Retornando a variável x, temos que

$$\int e^{\cos x} \operatorname{sen} x dx = -e^{\cos x} + c.$$

(b) Usando a fórmula da integração por partes com $u = \operatorname{arctg} x$ e $dv = dx$ temos que

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \int \frac{x}{1+x^2} dx.$$

Substituindo $t = 1 + x^2$ obtemos

$$\int \operatorname{arctg} x dx = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \int \frac{1}{t} dt = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \ln |1 + x^2| + c.$$

(c) Substituindo $u = \operatorname{sen} x$ obtemos:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2} dx = \int \frac{u}{u^2 - u - 2)} du = \int \frac{u}{(u-2)(u+1)} du = \int \frac{A}{(u-2)} + \frac{B}{(u+1)} du.$$

Resolvendo o sistema obtemos $A = 2/3$ e $B = 1/3$ e portanto a integral desejada será:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x \cos x}{\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen} x - 2} dx = \frac{2}{3} \ln |\operatorname{sen} x - 2| + \frac{1}{3} \ln |\operatorname{sen} x + 1| + c.$$

(d) Note que $\int_0^1 \ln x dx$ é uma integral impropria. Ou seja, se existir, $\int_0^1 \ln x dx = \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \ln x dx$. Por l'Hôpital,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln x &= \lim_{a \to 0+} \int_a^1 \ln x dx = \lim_{a \to 0+} (x \ln x - x)\Big|_a^1 \\
&= \lim_{a \to 0+} (-1 - a \ln a - a) = -1 - \lim_{a \to 0+} a \ln a \\
&= -1 - \lim_{a \to 0+} \frac{\ln a}{\frac{1}{a}} = -1 - \lim_{a \to 0+} \frac{\frac{1}{a}}{-\frac{1}{a^2}} = -1 + \lim_{a \to 0+} a = -1.
\end{aligned}$$

Questão 2: (2 pontos)

(a) (1 ponto) Considere a função $y = f(x) = \sqrt{1-x^2}$. Seja $a(x)$ a inclinição da reta tangente ao gráfico de f no ponto x. Calcule

$$\lim_{x\to 1-} a(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x\to(-1)+} a(x).$$

(b) (1 ponto) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função cuja reta tangente em $x = \ln 2$ é dado pela equação $y = 3x + 5 - 3\ln 2$. Calcule os valores das derivadas

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{f(x)}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d}{dx}\ln(f(x))$$

no ponto $x = \ln 2$.

Solução:

(a) Como a inclinação é a derivada, tem-se que $a(x) = f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1-x^2}}(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}$. Além disso, para $x \in (-1,1)$, $1-x^2 > 0$ e $\lim_{x\to 1^-}\sqrt{1-x^2} = \lim_{x\to -1^+}\sqrt{1-x^2} = 0$. Daí,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1^-} a(x) = \lim_{x\to 1^-}\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}} &= (\lim_{x\to 1^-} -x)(\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}})\\ &= -1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = -\infty.\end{aligned}$$

Pelos mesmos argumentos,

$$\lim_{x\to -1^+} a(x) = 1\cdot\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = +\infty.$$

(b) Pela definição da reta tangente, $f(\ln 2) = 3(\ln 2) + 5 - 3\ln 2 = 5$ e a inclinação da reta é igual a derivada em $\ln 2$, i.e. $f'(\ln 2) = 3$.

Para achar o valor de da primeira derivada, utilizaremos a regra do quociente:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{f(x)}\right) = \frac{e^x f(x) - e^x f'(x)}{(f(x))^2} = \frac{e^x(f(x) - f'(x))}{(f(x))^2}$$

Daí, para $x = \ln 2$, tem-se que

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{e^x}{f(x)}\right)(\ln 2) = \frac{e^{\ln 2}(f(\ln 2) - f'(\ln 2))}{(f(\ln 2))^2} = \frac{2(5-3)}{5^2} = \frac{4}{25}$$

Para achar o valor de da segunda derivada, utilizaremos a regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Daí, para $x = \ln 2$, tem-se que

$$\frac{d}{dx}\ln(f(x))(\ln 2) = \frac{f'(\ln 2)}{f(\ln 2)} = \frac{3}{5}.$$

Questão 3: (1 ponto)
Determine o valor de $a > 0$ para que o comprimento l da curva $y = \frac{2}{3}x^{3/2}$, $x \geq 0$, entre os pontos $x = 0$ e $x = a$, seja igual a $\frac{2}{3}$.

Solução:
Como $dy/dx = x^{1/2}$, pela substituição $u = x + 1$:

$$\ell(a) = \int_0^a \sqrt{1 + (dy/dx)^2}dx = \int_0^a \sqrt{1 + x}dx = \int_1^{a+1} \sqrt{u}du = \frac{2}{3}u^{3/2}\Big|_1^{a+1} = \frac{2}{3}\left((a+1)^{3/2} - 1\right).$$

Daí, se $\ell(a) = \frac{2}{3}$, tem se que

$$\frac{2}{3} = \frac{2}{3}\left((a+1)^{3/2} - 1\right) \iff 1 = (a+1)^{3/2} - 1 \iff (a+1)^{3/2} = 2.$$

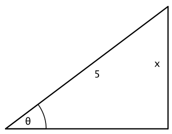
Como $a > 0$, támbem $(a+1)^3 > 0$. Daí,

$$(a+1)^{3/2} = 2 \iff (a+1)^3 = 4 \iff a = \sqrt[3]{4} - 1.$$

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: MAC 118 – Cálculo 1
Data: 20 de dezembro de 2016

Prova Final – Questões objetivas

1. Considere um triângulo retângulo com hipotenusa de comprimento $5\,cm$. Seja x a medida (em cm) do cateto oposto a um angulo θ (em rad). Assuma que x cresça a uma taxa de $3\,cm/min$. No instante em que $x = 3\,cm$ é correto afirmar que:



   (a) θ cresce a uma taxa de $\frac{3}{4}\,rad/min$
   (b) θ decresce a uma taxa de $\frac{3}{4}\,rad/min$
   (c) θ cresce a uma taxa de $\frac{3\pi}{4}\,rad/min$
   (d) θ decresce a uma taxa de $\frac{3\pi}{4}\,rad/min$
   (e) θ está parado

2. A inclinação da reta tangente à curva $y^2+(xy+1)^3 = 0$ no ponto $(2,-1)$ é:

   (a) $3/4$
   (b) $-3/2$
   (c) $2/3$
   (d) -4
   (e) 2

3. Qual o número de assintótas verticais da função $f(x) = \frac{1-\cos x}{x^2(x^2-4x+4)}$?

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 3
   (d) 4
   (e) 0

4. Para quais $\alpha > 0$, a integral $\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}dx$ é convergente?

   (a) $0 < \alpha < 1$
   (b) $\alpha = 1$
   (c) $0 < \alpha \le 1$
   (d) $\alpha > 1$
   (e) nenhum

5. A derivada de $f(x) = e^{\cos x}\cos(e^x)$ em $x = \pi/2$ é:

   (a) $-\cos(e^{\pi/2}) - e^{\pi/2}\,\mathrm{sen}(e^{\pi/2})$
   (b) $e^{\pi/2}\cos(e^{\pi/2}) - \mathrm{sen}(e^{\pi/2})$
   (c) $e^{\pi/2}\,\mathrm{sen}(e^{\pi/2}) + \cos(e^{\pi/2})$
   (d) $\cos(e^{\pi/2}) - e^{\pi/2}\,\mathrm{sen}(e^{\pi/2})$
   (e) $-\mathrm{sen}(e^{\pi/2}) + e^{\pi/2}\,\mathrm{sen}(e^{\pi/2})$

6. Se f' é continua em $[0,1]$, $f(x) \neq 0$ para todo $x \in [0,1]$, $f(0) = e^2$ e $f(1) = 1$, então $\int_0^1 \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ vale

   (a) -2
   (b) 2
   (c) 0
   (d) 1
   (e) -1

7. Sobre $\lim_{x\to\infty} x\int_0^{1/x} e^{t^2}\,dt$ é correto afirmar que seu valor é

   (a) 1
   (b) 2
   (c) 0
   (d) -2
   (e) -1

8. Se f' é contínua em $[\pi/2, \pi]$, $f(\pi/2) = -1$ e $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = 2$, então $\displaystyle\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ vale:

   (a) -1
   (b) 2
   (c) 1
   (d) -2
   (e) 0

9. O valor de $\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é:

   (a) $1/2$
   (b) $1/4$
   (c) $\sqrt{3}/2$
   (d) $-1/2$
   (e) $\sqrt{2}/2$

10. Sejam f e g funções diferenciáveis e suponha que$f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então podemos afirmar que os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$

   (a) não possuem mais do que uma interseção.
   (b) possuem exatamente uma interseção.
   (c) podem possuir mais de uma interseção.
   (d) não possuem interseção.
   (e) têm uma reta tangente em comum no ponto de interseção.