Questão 1: (2.5 pontos)
Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela expressão

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^2+\alpha}{x^2+2} & \text{se } x \leq 0, \\ \dfrac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{\alpha x}} & \text{se } x > 0, \end{cases}$$

onde α é um número positivo.

a) Determine as assíntotas horizontais do gráfico de $f(x)$, caso elas existam.

b) Determine os valores de α que tornam f contínua no ponto $x = 0$.

Solução:

a) Fixemos $\alpha > 0$. Notamos que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+\alpha}{x^2+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\cancel{x^2}(2+\frac{\alpha}{x^2})}{\cancel{x^2}(1+\frac{2}{x^2})} = \frac{\lim_{x\to-\infty}(2+\frac{\alpha}{x^2})}{\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{2}{x^2})} = \frac{2}{1} = 2.$

Por outro lado, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{\alpha x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\arctan(\sqrt{x})}{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{\alpha x}} = \frac{\frac{\pi}{2}}{+\infty} = 0.$

Assim, para qualquer $\alpha > 0$ as retas $y = 2$ e $y = 0$ são assíntotas horizontais para o gráfico de f.

b) Primeiro notamos que $f(0) = \dfrac{\alpha}{2}$. Para f ser contínua em $x = 0$ deve valer a igualdade

$$\lim_{x\to0^-} \frac{2x^2+\alpha}{x^2+2} = \frac{\alpha}{2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{\alpha x}}. \tag{1}$$

A primeira igualdade é imediata uma vez que $\displaystyle\lim_{x\to0^-} \frac{2x^2+\alpha}{x^2+2} = \frac{\lim_{x\to0^-}(2x^2+\alpha)}{\lim_{x\to0^-}(x^2+2)} = \frac{\alpha}{2}$. O último limite apresenta uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, e pode ser calculado aplicando a regra de l'Hôspital:

$$\lim_{x\to0^+} \frac{\arctan(\sqrt{x})}{\sqrt{\alpha x}} = \lim_{x\to0^+} \frac{\frac{1}{(1+x)}\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\frac{\alpha}{2\sqrt{\alpha x}}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \lim_{x\to0^+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}.$$

Em resumo, da igualdade (1) devemos ter $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha}} = \dfrac{\alpha}{2}$, o que é verdade apenas para $\alpha = \sqrt[3]{4}$.

Questão 2: (1.5 ponto)
Considere as funções $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ e $g(x) = 3x$. Prove que os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ se intersectam em único ponto quando $0 \leq x \leq \pi/2$.

Observação: lembre que $e \approx 2,718$.

Solução:

Primeiro provaremos que há pelo menos um ponto de interseção, que é equivalente a encontrar um $x_0 \in [0, \pi/2]$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$. Consideramos a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x) = e^{\operatorname{sen} x} - 3x,$$

que é contínua em $[0, \pi/2]$ e, além disso, satisfaz

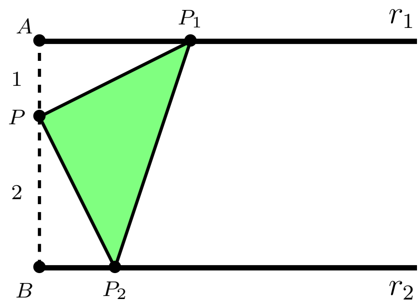
$$h(0) = 1 > 0 \quad \text{e} \quad h(\pi/2) = e - 3\frac{\pi}{2} < 0.$$

Então, pelo Teorema do Valor Intermediário existe um ponto $x_0 \in (0, \pi/2)$ tal que $h(x_0) = f(x_0) - g(x_0) = 0$, consequentemente $e^{\operatorname{sen} x_0} = 3x_0$.

Por outro lado, $h'(x) = e^{\operatorname{sen} x} \cos x - 3 < e - 3 < 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$, o que indica que h é estritamente decrescente $[0, \pi/2]$, logo h tem uma única raiz nesse intervalo, que é o x_0 indicado acima.

Questão 3: (2 pontos)

Na figura, as semirretas r_1 e r_2 são paralelas e o segmento AB é perpendicular a essas semirretas. O ponto P, situado no segmento AB, é tal que $\overline{AP} = 1$ e $\overline{BP} = 2$. Considere a coleção de todos os triângulos retângulos PP_1P_2, com ângulo reto em P, tais que P_1 está sobre a semirreta r_1 e P_2 está sobre a semirreta r_2.



Determine a menor área possível para um triângulo nessa coleção.

Solução:

Neste problema apresentamos duas soluções.

Primeira solução: Denotamos por x a medida do segmento AP_1. Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{PP_1} = \sqrt{1 + x^2}$. Por outro lado os triângulos PAP_1 e PBP_2 são semelhantes, logo temos a relação

$$\frac{\overline{BP_2}}{1} = \frac{2}{x} \Longleftrightarrow \overline{BP_2} = \frac{2}{x}.$$

Pelo Teorema de Pitágoras, $\overline{PP_2} = \sqrt{4 + \frac{4}{x^2}} = 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$. Assim, a área do triângulo PP_1P_2 em função de x é dada pela expressão:

$$A(x) = \frac{1}{2}\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} = \frac{1}{2}\sqrt{1 + x^2} \cdot 2\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = \frac{x^2 + 1}{x} = x + \frac{1}{x},$$

onde $0 < x < +\infty$. A partir de aqui podemos proceder de duas formas:

Variante 1: $A'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 \iff x = -1$ ou $x = 1$. Como apenas há um ponto crítico em $(0, +\infty)$ e, além disso,

$$\lim_{x\to 0^+} A(x) = \lim_{x\to +\infty} A(x) = +\infty,$$

temos que o valor de x que determina a área mínima é $x = 1$, sendo o valor dessa área $A(1) = 2$.

Variante 2: Observar que $A(x) = x + \frac{1}{x} = (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})^2 + 2 \geq 2$, sendo 2 o menor valor possível de $A(x)$, o que acontece quando $x = 1$.

Segunda solução: Denotamos por θ a medida dos ângulos $\measuredangle AP_1P = \measuredangle BPP_2$. Assim,

$$\overline{PP_1} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)} \quad \text{e} \quad \overline{PP_2} = \frac{2}{\cos(\theta)}.$$

Para esta modelagem, a área em função do ângulo θ é dada pela expressão:

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\overline{PP_1} \cdot \overline{PP_2} = \frac{1}{\operatorname{sen}(\theta)\cos(\theta)}, \quad \theta \in (0, \pi/2).$$

A partir de aqui podemos proceder de duas formas:

Variante 1: $A'(\theta) = -\dfrac{\cos^2(\theta) - \operatorname{sen}^2(\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)} = -\dfrac{\cos(2\theta)}{\operatorname{sen}^2(\theta)\cos^2(\theta)}$ Então, no intervalo $(0, \pi/2)$, temos que $A'(\theta) = 0 \iff \theta = \pi/4$. Como apenas há um ponto crítico em $(0, \pi/2)$ e, além disso,

$$\lim_{\theta\to 0^+} A(\theta) = \lim_{\theta\to \frac{\pi}{2}^-} A(\theta) = +\infty,$$

temos que o valor de θ que determina a área mínima é $\theta = \pi/4$, sendo o valor dessa área $A(\pi/4) = 2$.

Variante 2: Observar que $A(\theta) = \dfrac{2}{\operatorname{sen}(2\theta)}$, que assume seu valor mínimo em $(0, \pi/2)$ quando $\operatorname{sen}(2\theta)$ assume seu valor máximo nesse intervalo, ou seja, quando $\theta = \pi/4$ com $A(\pi/4) = 2$.

Questão 4: (2 pontos)
Calcule as seguintes integrais:

a) $\displaystyle\int (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)dx$ b) $\displaystyle\int \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}^2(x) - 5\operatorname{sen}(x) + 6}dx$

Solução:

a) Primeiro fazemos a substituição $y = x^2 - 2x + 2$, logo $dy = 2(x-1)dx$ de onde segue que $(x-1)dx = \frac{dy}{2}$. Assim,

$$\int (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)dx = \frac{1}{2}\int \ln(y)dy. \tag{2}$$

A última integral pode ser calculada usando integração por partes. Para isso fazemos $u = \ln(y)$ e $dv = dy$, logo $du = \frac{dy}{y}$ e $v = y$. Portanto,

$$\int \ln(y)dy = y\ln(y) - \int \cancel{y} \cdot \frac{dy}{\cancel{y}} + C = y\ln(y) - y + C = y(\ln(y) - 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Combinando (2) e (3) temos

$$\int (x-1)\ln(x^2 - 2x + 2)dx = \frac{1}{2}\Big(x^2 - 2x + 2\Big)\Big(\ln(x^2 - 2x + 2) - 1\Big) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

b) Primeiro fazemos a substituição $u = \text{sen}(x)$, logo $du = \cos(x)dx$. Então,

$$\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x) - 5\text{sen}(x) + 6}dx = \int \frac{du}{u^2 - 5u + 6} = \int \frac{du}{(u-2)(u-3)}. \tag{4}$$

Usando o método de decomposição em frações parciais temos

$$\frac{1}{(u-2)(u-3)} = \frac{1}{u-3} - \frac{1}{u-2};$$

portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{(u-2)(u-3)} &= \int \frac{du}{(u-3)} - \int \frac{du}{(u-2)} \\ &= \ln|u-3| - \ln|u-2| = \ln\left|\frac{u-3}{u-2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{5}$$

Combinando (4) e (5) temos

$$\int \frac{\cos(x)}{\text{sen}^2(x) - 5\text{sen}(x) + 6}dx = \ln\left|\frac{\text{sen}(x) - 3}{\text{sen}(x) - 2}\right| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Questão 5: (2 pontos)

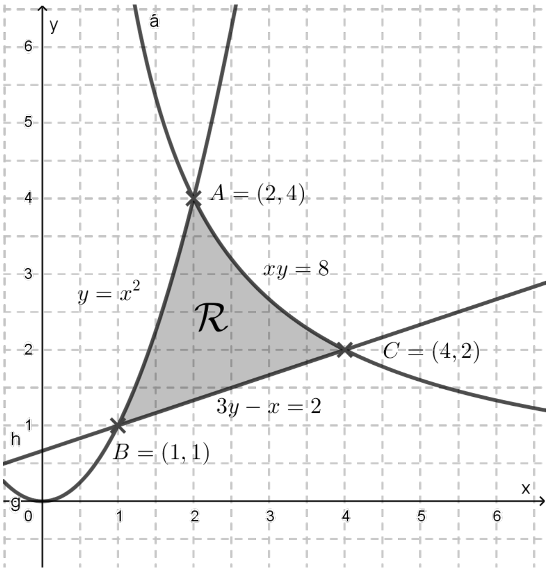
Seja $\mathcal{R}$ a região localizada no primeiro quadrante do plano cartesiano, cujos pontos estão localizados acima da reta $3y - x = 2$, abaixo da parábola $y = x^2$ e abaixo da hipérbole $y = \dfrac{8}{x}$.

a) Esboce $\mathcal{R}$, indicando os pontos de interseção das curvas.

b) Calcule a área de $\mathcal{R}$.

Solução:

a) O gráfico da região $\mathcal{R}$ está apresentado na seguinte figura.



b) A área de $\mathcal{R}$ pode ser calculada como segue

$$
\begin{aligned}
A(\mathcal{R}) &= \int_1^2 \left(x^2 - \frac{x+2}{3}\right)dx + \int_2^4 \left(\frac{8}{x} - \frac{x+2}{3}\right)dx \\
&= = \int_1^2 x^2 dx + \int_2^4 \frac{8}{x}dx - \int_1^4 \frac{x+2}{3}dx \\
&= \frac{x^3}{3}\bigg|_1^2 + 8\ln(|x|)\bigg|_2^4 - \frac{(x+2)^2}{6}\bigg|_1^4 \\
&= \frac{7}{3} + 8\Big(\ln(4) - \ln(2)\Big) - \frac{36}{6} + \frac{9}{6} \\
&= 8\ln(2) - \frac{13}{6}.
\end{aligned}
$$