Questão 1: (2 pontos)

Calcule: a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\sqrt{(x+1)^2+4}\,\right)^3}dx$ c) $\dfrac{d}{dx}\tan\left(x^{\frac{4}{3}}\ln x\right)$

Solução:

a) Note que o numerador e o denominador convergem a 0 quando $x \to 0$. Daí, pode-se aplicar a regra de l'Hôpital:

$$\frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x} = \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{x}\,\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{1+\sqrt{1-x^2}} = \frac{1^2-(1-x^2)}{x\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} = \frac{x}{\left(1+\sqrt{1-x^2}\right)} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

b) Substituindo $\tan\theta = \dfrac{x+1}{2}$, temos que $dx = 2\sec^2\theta d\theta$ e que $\sqrt{(x+1)^2+4} = 2\sec\theta$. Ademais, quando $x=-1$, $\theta=0$ e quando $x=1$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$. Assim,

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{\left(\sqrt{(x+1)^2+4}\,\right)^3}dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sec^2\theta}{(2\sec\theta)^3}d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos\theta d\theta = \frac{1}{4}\sin\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{8}.$$

c) Note que $\frac{d}{dx}\tan x = 1/\cos^2 x$ e $\frac{d}{dx}\ln x = 1/x$. Aplicando a regra de cadeia e do produto:

$$\frac{d}{dx}\tan\left(x^{\frac{4}{3}}\ln x\right) = \frac{\frac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}\ln x + x^{\frac{4}{3}}x^{-1}}{\cos^2\left(x^{\frac{4}{3}}\ln x\right)} = \frac{\left(\frac{4}{3}\ln x+1\right)x^{\frac{1}{3}}}{\cos^2\left(x^{\frac{4}{3}}\ln x\right)}$$

Questão 2: (2.5 pontos)

Seja $f:\mathbb{R}\backslash\{0\}\to\mathbb{R}$ uma função duas vezes diferenciável em seu domínio e tal que:

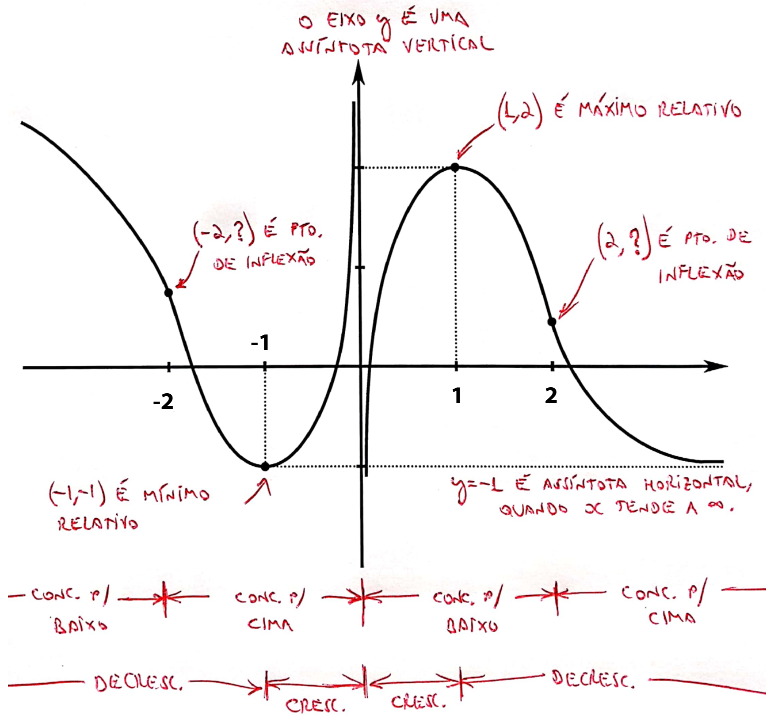
- $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to\infty} f(x) = -1$
- $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$
- $f'(x) < 0,\ x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$
- $f'(x) > 0,\ x\in(-1,0)\cup(0,1)$
- $f'(-1) = 0$
- $f'(1) = 0$
- $f(-1) = -1$
- $f''(x) < 0,\ x\in(-\infty,-2)\cup(0,2)$
- $f''(x) > 0,\ x\in(-2,0)\cup(2,\infty)$
- $f''(-2) = 0$
- $f''(2) = 0$
- $f(1) = 2$

a) Faça um esboço do gráfico de f, indicando claramente:
(1) regiões de crescimento e decrescimento;
(2) pontos extremos **relativos**;
(3) pontos extremos **absolutos**;
(4) assíntotas;
(5) concavidade do gráfico;
(6) pontos de inflexão.

b) A função f tem quantas raízes em $(-\infty,0)$? E em $(0,2]$? (Se não houver informação suficiente para se determinar a quantidade exata de raízes, indique quais são as quantidades possíveis.) Justifique.

Solução:

a) Nem existe um máximo global nem um mínimo global pois $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$.



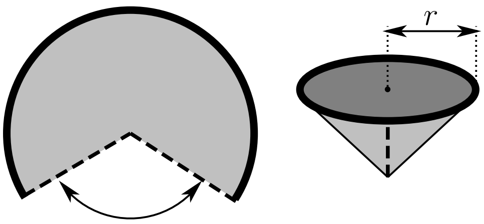
b) 1) Em $(-\infty, 0)$, existem exatamente **duas** raízes: uma em $(-2, -1)$ e uma em $(-1, 0)$.
Justificação: Em $(\infty, -1]$, existe ao menos uma raiz em $(\infty, -1)$ pelo teorema do valor intermediário, f é contínua em $(\infty, -1]$, $f(-1) = -1$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. Como $f' < 0$ em $(\infty, -1)$, o teorema do valor médio (ou teorema de Rolle) implica que há ao máximo uma raiz. O mesmo raciocínio aplica-se ao intervalo $[-1, 0)$, usando que $f' > 0$ em $(-1, 0)$.

2) Em $(0, 2]$, existem ou **uma ou duas** raízes.
Justificação: Em $(0, \infty)$, existem exatamente duas raízes pelo raciocínio anterior: uma em $(0, 1)$ e uma em $(1, \infty)$. Esta última pode tanto ocorrer antes como depois de 2 (ou mesmo exatamente em 2). Assim, as quantidades possíveis são **uma ou duas** raízes em $(0, 2]$.

Questão 3: (1.5 ponto)
Um copo na forma de um cone é produzido cortando-se um setor circular de um disco de raio 1, como indicado na figura.

a) Escreva o volume do copo como função do raio r da base do copo.

b) Determine o maior volume possível deste copo.



Solução:

a) Seja β o ângulo oposto ao setor. Então, a circunferência da base do cone é igual a β que implica que o raio da base é $r = \beta/2\pi \in [0,1]$. Além disso, por Pitágoras, a altura é dado por $h = \sqrt{1-r^2} = \sqrt{1-r^2}$. Daí, obtém-se para o volume V do cone que

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi h r^2 = \frac{\pi}{3} r^2 \sqrt{1-r^2}.$$

Daí, para $r \in [0,1]$, a função é dada por $V(r) = \frac{\pi}{3\sqrt{1-r^2}}(2r - 3r^3)$.

b) Basta determinar o máximo absoluto da função

$$V : [0,1] \to \mathbb{R},\ V(r) = \pi\left(2r - 3r^3\right)/3\sqrt{1-r^2}.$$

Como $V(r)$ é contínua em $[0,1]$ e diferenciável em $(0,1)$ é suficiente comparar os valores de $V(r)$ para $r = 0, 1$ e as raízes de $V'(r)$ em $(0,1)$. A derivada obtém-se pela aplicação da regra do quociente:

$$\frac{dV}{dr} = \frac{\pi}{3}\left(2r\sqrt{1-r^2} + \frac{-2r^3}{2\sqrt{1-r^2}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{1-r^2}}\left(2r - 3r^3\right).$$

Daí, as raizes de $V'(r)$ em $\mathbb{R}$ são 0 e $\pm\sqrt{2/3}$. Em particular, $\sqrt{2/3}$ é a única raiz em $(0,1)$. Como

$$V\left(\sqrt{2/3}\right) = \frac{\pi}{3}\frac{2}{3}\sqrt{1-2/3} = \frac{2\pi\sqrt{3}}{27} > V(0) = V(1) = 0,$$

este ultimo valor é o máximo valor possível.

Questão 4: (2 pontos)
Determine as equações das duas retas que passam pelo ponto (3,1) e que são tangentes à curva $y = x^2 - 4$.

Solução:

Como a derivada de $x^2 - 4$ é $2x$, a reta tangente à curva (parábola) no ponto $(x_0, x_0^2 - 4)$ é dada por $y = x_0^2 - 4 + 2x_0(x - x_0)$. Assim, para se determinar x_0, basta resolver

$$1 = x_0^2 - 4 + 2x_0(3 - x_0)$$

ou

$$x_0^2 - 6x_0 + 5 = (x_0 - 1)(x_0 - 5) = 0.$$

Conclui-se que:

- (fazendo $x_0 = 1$) a reta $y = -3 + 2(x - 1) = 2x - 5$ é tangente à parábola no ponto $(1, -3)$ e passa por (3,1);
- (fazendo $x_0 = 5$) a reta $y = 21 + 10(x - 5) = 10x - 29$ é tangente à parábola no ponto $(5, 21)$ e passa por (3,1).

Questão 5: (2 pontos)
Determine a área da região limitada compreendida entre as curvas $y = 4x^3 - 10x^2 - 6x + 1$ e $y = 2x^2 + 10x + 1$.

Solução:

Para se determinar o sinal de $4x^3 - 10x^2 - 6x + 1 - (2x^2 + 10x + 1) = 4x^3 - 12x^2 - 16x$, basta se fatorar o polinômio: $4x^3 - 12x^2 - 16x = x(2x + 2)(2x - 8)$.

Conclui-se que as curvas se interceptam nas abscissas -1, 0 e 4 e verifica-se que a diferença entre elas $4x^3 - 12x^2 - 16x$ é positiva no intervalo $(-1, 0)$ e negativa no $(0, 4)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_{-1}^{0} \left(4x^3 - 12x^2 - 16x\right) dx - \int_{0}^{4} \left(4x^3 - 12x^2 - 16x\right) dx \\
&= \left(x^4 - 4x^3 - 8x^2\right)\Big|_{-1}^{0} - \left(x^4 - 4x^3 - 8x^2\right)\Big|_{0}^{4} \\
&= -((-1)^4 - 4(-1)^3 - 8(-1)^2) - (4^4 - 4(4)^3 - 8(4)^2) \\
&= 131
\end{aligned}$$