CÁLCULO 1 UNIFICADO — 2023-2 — SEGUNDA PROVA – A — **BOA PROVA!**

QUESTÃO **1**. (1.2) Quais afirmações são **verdadeiras**?

I. Se $f(x)$ é contínua em $\mathbb{R}$, com $f'(x) > 0$, $f(2) = -2$ e $f(10) = 4$, então f tem uma raiz no intervalo $[2, 10]$.

II. Se $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$, então $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$

III. Se f é função derivável em $\mathbb{R}$ e possui 2 raízes, então sua derivada possui ao menos uma raiz.

IV. Se f é função derivável em $\mathbb{R}$ e $f'(20) = 0$, então $x = 20$ é um ponto de máximo ou de mínimo de f.

(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) I, II (F) I, III (G) I, IV

(H) II, III (I) II, IV (J) III, IV (K) I, II, III (L) I, II, IV (M) I, III, IV (N) II, III, IV

QUESTÃO **2**. (1.2) Calcule $f'(1)$ sabendo que $f(x) = \operatorname{sen}\Big(2 \cdot \ln(x)\Big)$.

(A) -2 (B) 0 (C) 1 (D) 2 (E) $2\cos(2)$

QUESTÃO **3**. (1.2) Ache a aproximação linear $L(x)$ ao redor de $x = 0$ para $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + 4e^x + 2$, e estime $f(0.1)$.

(A) $L(x) = x^2 + 6; f(0.1) \approx 6.01$ (B) $L(x) = x^2 + 6; f(0.1) \approx 6.3$ (C) $L(x) = 4x + 6; f(0.1) \approx 6.4$

(D) $L(x) = 4x + 6; f(0.1) \approx \mathrm{e}^{0.1} + 2$ (E) $L(x) = 4x; f(0.1) \approx 0.4$ (F) $L(x) = 4x; f(0.1) \approx \mathrm{e}^{0.1}$

(G) $L(x) = 2x + 3; f(0.1) \approx 3.2$ (H) $L(x) = 2x + 3; f(0.1) \approx 6.5$

QUESTÃO **4**. (1.2) Considere uma caixa cilíndrica com $1\,\mathrm{m}^3$ de volume. O material da parte lateral e do fundo custa R$ 10,00 por metro quadrado. O material da tampa custa R$ 20,00 por metro quadrado. Seja r o raio do círculo da base do cilindro. A expressão que define o custo $C(r)$ de construção da caixa é:

(A) $30\pi r^2 + \dfrac{20}{r}$. (B) $20\pi r^2 + \dfrac{20}{r}$. (C) $30\pi r^2 + \dfrac{30}{r}$. (D) $20\pi r^2 + \dfrac{30}{r}$. (E) $20\pi r^2 + \dfrac{30}{r^2}$.

QUESTÃO **5**. (1.2) Considere $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & , \quad x \le 0 \\ \dfrac{x^2 - 2}{k} & , \quad x > 0. \end{cases}$. Responda cada item, justificando:

(a) Determine o valor da constante k para que $f(x)$ seja contínua. Use este valor de k nos itens (b) e (c).

(b) Encontre o valor de $\mathbf{x < 0}$ onde a reta $y = \dfrac{1}{2}$ intersecta o gráfico de f.

(c) Diga o número de pontos de intersecção da reta $y = c$ com o gráfico de f, para $c = -5000$; $c = \dfrac{1}{3}$; e $c = 10$.

QUESTÃO **6**. (1) Considere $f(x) = 3x^3 - 4x + 2$, definida em $x \in [0, 1]$. Dê os valores de máximo e mínimo absolutos/globais de f em $[0, 1]$, indicando onde os valores ocorrem. Justifique!

QUESTÃO **7**. (2) Seja $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Então $f'(x) = \dfrac{2x}{1 + x^2}$ e $f''(x) = \dfrac{2 - 2x^2}{(1 + x^2)^2}$. Justificando:

- Dê o domínio da função f, e os intervalos onde a função f é crescente e onde é decrescente.
- Verifique se o gráfico de f tem retas assíntotas horizontais e verticais, e escreva suas equações caso existam.
- Indique os pontos críticos de f e os valores de máximo ou mínimo locais de f, se existirem.
- Dê os intervalos onde f tem concavidade para cima e onde tem concavidade para baixo. Determine os pontos de inflexão, caso existam
- Use as informações acima para esboçar o gráfico da função f.

QUESTÃO **8**. (1) Seja $f(x)$ uma função e $g(x) = 2x^3 + \sin(x - 1)$ sua derivada, calcule $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(1 + x) - f(1)}{x}$. Justifique!