Questão 1: (2 pontos)

Calcule as seguintes integrais:

(a) (0.8 ponto)

$$\int \frac{1}{x + x(\ln x)^2} dx$$

(b) (0.6 ponto)

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx$$

(c) (0.6 ponto)

$$\int \frac{3x-4}{(x-3)(x+2)} dx$$

Solução:

(a) Com a substituição $u = \ln x$, $du = \frac{1}{x}dx$, obtemos

$$\int \frac{1}{x + x(\ln x)^2} dx = \int \frac{1}{1+u^2} du = \arctan u + C = \arctan(\ln x) + C.$$

(b) Com a substituição $u = 2x + 1$, $du = 2dx$ (logo $x = \frac{1}{2}(u-1)$), obtemos

$$\int \frac{x}{\sqrt{2x+1}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{u-1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \int \sqrt{u} du - \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{1}{4} 2u^{1/2} + C$$

$$= \frac{1}{6}(2x+1)^{3/2} - \frac{1}{2}(2x+1)^{1/2} + C.$$

(c)

$$\int \frac{3x-4}{(x-3)(x+2)} dx = \int \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} dx.$$

Resolvendo o sistema, obtemos $A = 1, \quad B = 2$. Assim, a integral desejada é

$$\int \frac{1}{x-3} dx + \int \frac{2}{x+2} dx = \ln|x-3| + 2\ln|x+2| + C.$$

Questão 2: (2 pontos)

Sejam A e B pontos contidos no eixo x e eixo y, respectivamente, tais que o segmento ligando A e B passa por $(1, 2)$. Determine A e B tal que a área do triângulo com vertices A, B e $(0, 0)$ é minimal.

Solução:

Sejam $t, s > 0$ e $A = (1+t, 0)$, $B = (0, 2+s)$. Por semelhança de triângulos, $B = (0, 2+2/t)$. Daí, a área $a(s)$ do triângulo como função de t é

$$a(t) = \frac{1}{2}(1+t)(2+s) = \frac{1}{2}(1+t)(2+2/t) = \frac{1}{2}(2+2/t+2t+2) = 2+t+1/t.$$

As derivadas são:

$$a'(t) = 1 - 1/t^2, \quad a''(t) = 2/t^3,$$

Daí, a tem um mínimo local em 1. Basta de verificar se $a(1)$ é um mínimo global (para $t > 0$).

Solução 1. Se $t > 1$, então $a'(t) = 1 - 1/t^2 < 0$. Se $0 < t < 1$, então $a'(t) = 1 - 1/t^2 > 0$. Daí, $a(t)$ é decrescente em $(0, 1)$ e crescente em $(1, \infty)$. Daí, $a(1)$ é um mínimo global.

Solução 2. Como, para $t > 0$, $a''(t) = 2/t^3 > 0$, a função $a : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ é convexa para cima. Daí, $a(1)$ é um mínimo global.

Solução 3.

$$\lim_{t\to\infty} a(t) = 2 + \lim_{t\to\infty} t + \lim_{t\to\infty} 1/t = 2 + \infty + 0 = \infty$$
$$\lim_{t\to 0} a(t) = 2 + \lim_{t\to 0} t + \lim_{t\to 0} 1/t = 2 + 0 + \infty = \infty.$$

Então, por continuidade, $a(1)$ é um mínimo global.

Ou seja, os pontos A, B tal que a área é minimal são $A = (0, 2)$ e $B = (0, 2 + 2/1) = (0, 4)$.

Questão 3: (1 ponto)
Seja $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ uma função contínua. Sabendo-se que o volume do sólido obtido girando o gráfico de f em torno do eixo x entre $x = 0$ e $x = a$ é $a^2 + a$ para todo $a > 0$, encontre a expressão de $f(x)$ quando $x > 0$.

Solução:
Por hipotése, tem-se que o volume $V(a)$ do sólido é igual a $a^2 + a$. Do outro pela formula para sólidos de revolução,

$$V(a) = \pi \int_0^a (f(x))^2 dx.$$

Daí, $\pi \int_0^a (f(x))^2 dx = a^2 + a$. Pelo segundo teorema fundamental do cálculo,

$$\pi(f(a))^2 = 2a + 1.$$

Ou seja, $f(x) = \sqrt{(2x + 1)/\pi}$.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: MAC 118 – Cálculo 1
Data: 08 de dezembro de 2016

P2 – Questões objetivas

1. Seja $k > 1$. Considere as seguintes integrais: (I) $\int_0^1 \sqrt{x}\ln(x)\,dx$ e (II) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^k}\,dx$. É correto afirmar:
   (a) Ambas as integrais convergem
   (b) Ambas as integrais divergem
   (c) Apenas a integral em (I) converge
   (d) Apenas a integral em (II) converge
   (e) A integral em (I) converge e a convergência da integral em (II) depende do valor de k

2. Sobre $\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} \sqrt{e^{2t}+3}\,dt}{x^2}$ é correto afirmar que:
   (a) Seu valor é 2
   (b) Seu valor é 0
   (c) Seu valor é 1
   (d) Seu valor é $\sqrt{3}$
   (e) O limite não existe

3. Se $P_0 = (x_0, y_0)$ é o ponto na curva $y + x^2 = 0$ que está mais próximo de $(-12, -15/2)$ então $x_0 + y_0$ é:
   (a) -12
   (b) -2
   (c) -6
   (d) -20
   (e) nenhuma das alternativas

4. Se f' é contínua em $[0, 1]$, $f(0) = 0$ e $f(1) = \pi/2$, então $\int_0^1 \cos(f(x))f'(x)\,dx$ vale:
   (a) 1
   (b) 0
   (c) -1
   (d) 2
   (e) -2

5. Se $f(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{t^3+2}}\,dt$ então qual das afirmações abaixo é FALSA?
   (a) $f(1) > 1$
   (b) $f(0) = 0$
   (c) f é contínua para $x > 0$
   (d) $f'(1) = 1/\sqrt{3}$
   (e) $f(-1) > -1$

6. Fixado $m > 0$, considere a região R delimitada pelas curvas $y = \frac{1}{x}$, $x = m$, $x = 2m$ e $y = 0$. Considere também o sólido W dado pela rotação de R em torno do **eixo y**. Se A é a área de R e V é o volume de W, então:
   (a) A não depende de m e V é diretamente proporcional a m
   (b) A é diretamente proporcional a m e V é diretamente proporcional a m^2
   (c) A é diretamente proporcional a m^2 e V é diretamente proporcional a m^3
   (d) A e V são diretamente proporcionais a m^2
   (e) A e V são diretamente proporcionais a m

7. Se $A = \int_2^3 \frac{4x^2-3x+2}{x^2(x-1)}\,dx + \int_2^3 \frac{2}{x^2}\,dx$ então
   (a) $A = \ln(12)$
   (b) $A = \ln(3/16)$
   (c) $A = \ln(16/3)$
   (d) $A = \ln(27/2)$
   (e) $A = \ln(18)$

8. Seja R a região do primeiro quadrante limitada pelos eixos coordenados e por $y = 1 - x^2$. Suponha que a reta $y = d$ divida R em duas sub-regiões de mesma área. Então d vale:
   (a) $1 - (1/\sqrt[3]{4})$
   (b) $1/\sqrt[3]{2}$
   (c) $1/\sqrt[3]{3}$
   (d) $1 - (1/\sqrt[3]{9})$
   (e) $1/2$

9. Se f' é contínua em $[\pi/2, \pi]$, $f(\pi/2) = -1$ e $\int_{\pi/2}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{sen}\,x\,dx = 2$, então $\int_{\pi/2}^{\pi} f(x)\cos x\,dx$ vale:
   (a) -1
   (b) 2
   (c) 1
   (d) -2
   (e) 0

10. O valor de $\int_0^{\sqrt{3}/2} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ é:
   (a) $1/2$
   (b) $1/4$
   (c) $\sqrt{3}/2$
   (d) $-1/2$
   (e) $\sqrt{2}/2$