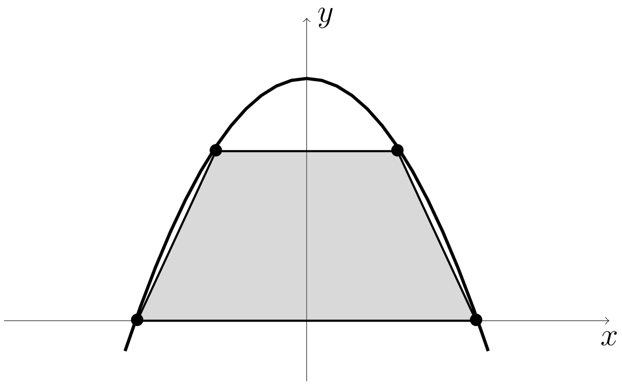
Questão 1: (1.5 ponto)

Seja $\mathcal{D}$ a região limitada do plano, compreendida entre a parábola $y = 1 - x^2$ e o eixo x. Considere um trapézio isóscele contido em $\mathcal{D}$ com as seguintes propriedades:

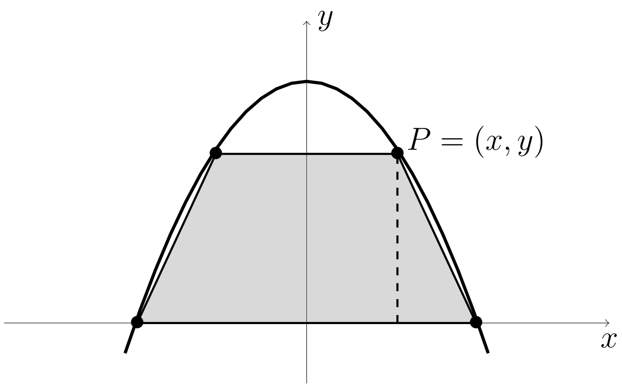
- a base maior é o segmento $[-1, 1]$ do eixo x;
- os vértices da base menor também estão situados no gráfico da parábola (ver figura abaixo).



Qual é a maior área possível que este trapézio pode ter?

Solução:

A área de um trapézio isósceles é dada por $A = \dfrac{(B+b)h}{2}$, onde B é a base maior, b é a base menor e h é a altura do trapézio. Denotemos por $P = (x, y)$ o vértice da base menor, com $x \geq 0$, conforme ilustrado na figura.



A área do trapézio em função de x é determinada por

$$A(x) = \frac{(2+2x)(1-x^2)}{2} = -x^3 - x^2 + x + 1, \quad x \in [0, 1].$$

Como a função é contínua e está definida em um intervalo fechado e limitado, sabemos que ele assume um valor máximo absoluto (note que nos extremos, o trapézio se degenera, sendo que quando $x = 0$, temos um triângulo isósceles). Como $A(x)$ é derivável em qualquer ponto, os pontos críticos são aqueles em que a sua derivada se anula. Como $A'(x) = -3x^2 - 2x + 1$, o único ponto crítico no interior do intervalo é o ponto $x = \frac{1}{3}$. Comparando com o valor de A nos extremos ($A(0) = 1$ e $A(1) = 0$), vemos que o valor máximo é dado por $A(\frac{1}{3}) = \frac{32}{27}$. Outra possibilidade seria considerar $A(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ definida apenas no intervalo aberto $(0, 1)$ e verificar que $A'(x) > 0$ em $(0, 1/3)$ e $A'(x) < 0$ em $(1/3, 1)$.

Questão 2: (2.5 pontos)

Calcule as seguintes integrais:

$$\text{a)} \int_1^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x} dx \qquad \text{b)} \int x^3 \text{sen}\,(x^2) dx \qquad \text{c)} \int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$$

Solução:

a) Usamos integração por substituição. Fazendo a mudança $u = \pi \ln(x)$ temos que $du = \frac{\pi}{x} dx$, donde $\frac{dx}{x} = \frac{du}{\pi}$. Deve-se também substituir os limites de integração:

- para $x = 1$ tem-se $u = 0$;
- para $x = \sqrt{e}$ tem-se $u = \frac{\pi}{2}$.

Assim, a integral $\displaystyle\int_1^{\sqrt{e}} \frac{\cos(\pi \ln x)}{x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \frac{du}{\pi} = \frac{1}{\pi} \sin(u)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{\pi}$.

b) Primeiro fazemos a mudança $t = x^2$, logo $dt = 2xdx$. Segue-se que

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int x^2 \sin(x^2) x dx = \int t \sin(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t \sin(t) dt.$$

Para resolver a integral indefinida $\displaystyle\int t \sin(t) dt$, faremos integração por partes:

- $u = t$, o que nos dá $du = dt$;
- $dv = \sin(t) dt$, o que nos dá $v = -\cos(t)$.

Assim, a integral $\displaystyle\int t \sin(t) dt = -t \cos(t) + \int \cos(t) dt = -t \cos(t) + \sin(t) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$. Voltando à variável original $t = x^2$, concluímos que

$$\int x^3 \sin(x^2) dx = \int x^2 \sin(x^2) x dx = \int t \sin(t) \frac{dt}{2} = \frac{1}{2}[\sin(x^2) - x^2 \cos(x^2)] + c,\ c \in \mathbb{R}.$$

c) Primeiro, vamos simplificar o integrando $\dfrac{1}{x^2 - 4x + 3}$ via frações parciais. Observe que $x^2 - 4x + 3 = (x - 3)(x - 1)$. Assim, podemos escrever:

$$\frac{1}{x^2 - 4x + 3} = \frac{A}{x - 3} + \frac{B}{x - 1}. \tag{1}$$

Para se determinar as constantes A e B, somam-se os termos

$$\frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-1} = \frac{x(A+B) + (-A-3B)}{(x-3)(x-1)}$$

e, usando (1), tem-se o seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ -A - 3B = 1, \end{cases}$$

cuja única solução é $A = \frac{1}{2}$ e $B = -\frac{1}{2}$. Assim,

$$\int \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-3} dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{x-1} dx = \frac{1}{2} \ln|x-3| - \frac{1}{2} \ln|x-1| + c = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x-3}{x-1} \right| + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$.

Questão 3: (2 pontos)

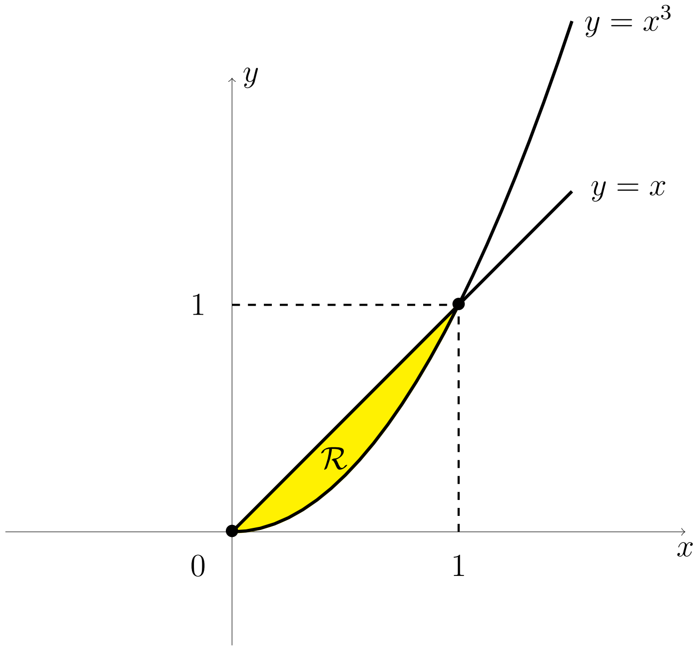
Seja $\mathcal{R}$ a região limitada do plano, que é delimitada pelos gráficos das curvas $y = x^3$ e $y = x$, consideradas para valores $x \geq 0$.

a) Esboce a região $\mathcal{R}$, indicando os pontos de interseção das curvas.

b) Calcule o volume do sólido obtido ao girar a região $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = 1$.

Solução:

a) A figura mostra o gráfico da região $\mathcal{R}$.



b) O volume do sólido é dado por

$$\begin{aligned} V &= \int_0^1 \pi\Big[(1-x^3)^2 - (1-x)^2\Big]dx \\ &= \pi\int_0^1 \Big[x^6 - 2x^3 - x^2 + 2x\Big]dx \\ &= \frac{13}{42}\pi. \end{aligned}$$

Questão 4: (2 pontos)

a) Determine se a integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+1}}$ congerge ou diverge, justificando sua resposta.

b) Calcule o valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx$.

Solução:

a) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} = \int_0^{1} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+1}}$.

A primeira das integrais é convergente pois a função $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^3+5x^2+1}}$ é contínua em $[0,1]$. Para estudar a convergência da segunda integral observamos que

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} =: g(x), \quad x \geq 1.$$

Como a integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} < +\infty$, pois $3/2 > 1$, segue do critério de comparação que a integral

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} < +\infty,$$

logo $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} < +\infty$, ou seja, converge.

Observação: a convergência da segunda integral pode ser verificada do seguinte modo:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^{3/2}}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} = 1,$$

o que significa que as integrais

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^3+5x^2+1}} \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}}$$

convergem ou divergem simultaneamente.

b) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+2x+2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1}$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x+1)^2+1} &= \lim_{t\to+\infty} \int_0^{t} \frac{dx}{(x+1)^2+1}\\ &= \lim_{t\to+\infty} \arctan(x+1)\Big|_0^t\\ &= \lim_{t\to+\infty} \Big[\arctan(t+1) - \arctan(1)\Big] = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}\end{aligned}$$

Questão 5: (2 pontos)

Considere as funções $f(x) = \displaystyle\int_0^{x^2} e^{(1-t^2)}dt$ e $g(x) = \displaystyle\int_0^{x+2\pi} \operatorname{sen}(t)\,dt$. Determine o valor de $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

Solução:

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo, sabemos que f e g são deriváveis. Em particular, f e g são contínuas em $x=0$, donde obtemos

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^0 e^{(1-t^2)}dt = 0$$

e

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(t)\,dt = 0.$$

Usando L'Hôspital, o Teorema Fundamental do Cálculo e o fato de que $\lim_{x\to 0}\dfrac{x}{\operatorname{sen}(x)} = 1$, obtemos

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(1-x^4)}2x}{\operatorname{sen}(x+2\pi)} = \lim_{x\to 0}\frac{e^{(1-x^4)}2x}{\operatorname{sen}(x)} = 2e.$$