Questão 1: (3.5 pontos)
Calcule:

(a) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$;

(b) $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1}$;

(c) $\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}$;

(d) $f'(x)$, onde $f(x) = \mathrm{e}^{\operatorname{sen}(x^3+\sqrt{x}+1)}$.

Solução:

(a) Como $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$ é contínua em $x = 1$, temos que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - x^2 + x - 1}{x^3 + x^2 + x + 1} = f(1) = 0.$$

(b) Dividindo o numerador e o denominador por $\sqrt{x}$, obtemos

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 1.$$

(c) Para sair da indeterminação "0^0", reescrevemos

$$(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^{\ln(\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x}} = \mathrm{e}^{\operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)}.$$

Assim, como e^x é uma função contínua, temos que

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)}.$$

Como em $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x)$ temos uma indeterminação do tipo "$0\cdot\infty$ ", reescrevemos a função sob a forma de quociente:

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x \ln(\operatorname{sen} x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\frac{1}{\operatorname{sen} x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cosec} x},$$

obtendo agora uma indeterminação do tipo "0/0". Assim, pela Regra de l'Hôpital, obtemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\operatorname{sen} x)}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\operatorname{sen} x}\cos x}{-\operatorname{cosec} x \operatorname{cotg} x} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{1}{\operatorname{cosec} x} = \lim_{x\to 0^+} -\operatorname{sen} x = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0^+} (\operatorname{sen} x)^{\operatorname{sen} x} = \mathrm{e}^0 = 1.$$

(d) Pela Regra da Cadeia, temos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{\operatorname{sen}(x^3+\sqrt{x}+1)}(\operatorname{sen}(x^3+\sqrt{x}+1))' \\ &= e^{\operatorname{sen}(x^3+\sqrt{x}+1)}\cos(x^3+\sqrt{x}+1)(x^3+\sqrt{x}+1)' \\ &= e^{\operatorname{sen}(x^3+\sqrt{x}+1)}\cos(x^3+\sqrt{x}+1)\left(3x^2+\frac{1}{2\sqrt{x}}\right). \end{aligned}$$

Questão 2: (1.5 ponto)
Encontre a equação da reta tangente à curva $x^4 + y^4 = 12xy^2 - 7$ no ponto $(2, 1)$.

Solução:
Derivando implicitamente a equação da curva em relação a x, obtemos

$$4x^3 + 4y^3y' = 12y^2 + 24xyy'.$$

Portanto, em cada ponto (x, y) temos que

$$y' = \frac{12y^2 - 4x^3}{4y^3 - 24xy}.$$

Em particular, substituindo $(x, y) = (2, 1)$ na equação acima, obtemos o coeficiente angular m da reta tangente à curva passando pelo ponto $(2, 1)$:

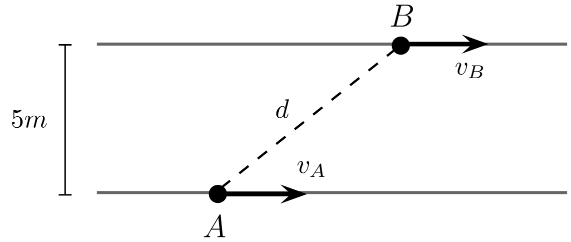
$$m = \frac{12(1)^2 - 4(2)^3}{4(1)^3 - 24(2)(1)} = \frac{5}{11}.$$

Assim, a equação da reta tangente à curva dada passando pelo ponto $(2, 1)$ é

$$y - 1 = \frac{5}{11}(x - 2)$$

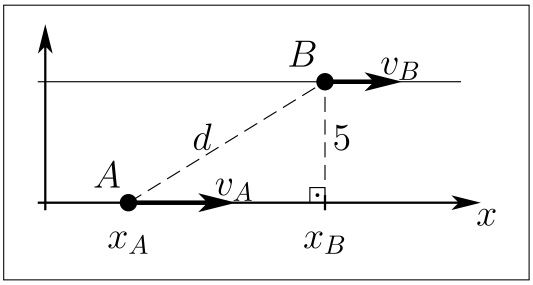
$$\Rightarrow y = \frac{5}{11}x + \frac{1}{11}.$$

Questão 3: (2.0 pontos)
Dois caminhos retilíneos paralelos distam de 5 metros. Os objetos A e B deslocam-se sobre os caminhos com velocidades $v_A(t)$ e $v_B(t)$, respectivamente. Em um certo instante t_0, a distância d entre eles é de 13 m, A tem velocidade $v_A(t_0) = 5$ m/s e B tem velocidade $v_B(t_0) = 2$ m/s, conforme a figura. Determine $d'(t_0)$, a velocidade com que eles estão se aproximando.



Solução:

Denotamos por $x_A(t)$ e $x_B(t)$ as abscissas dos pontos A e B ao longo do tempo, conforme indicado na figura abaixo.



Pelo Teorema de Pitágoras,

$$d^2(t) = (x_B(t) - x_A(t))^2 + 5^2\,\mathrm{m}^2. \tag{1}$$

Em particular, para $t = t_0$, substituindo $d(t_0) = 13$, obtemos que

$$x_B(t_0) - x_A(t_0) = 12\,\mathrm{m}.$$

Derivando (1) em relação ao tempo, temos

$$2d(t)d'(t) = 2(x_B(t) - x_A(t))(x'_B(t) - x'_A(t))$$

e portanto

$$d'(t_0) = \frac{(x_B(t_0) - x_A(t_0))(x'_B(t_0) - x'_A(t_0))}{d(t_0)}.$$

Finalmente, usando que $x'_B(t_0) = v_B(t_0) = 2\,\mathrm{m/s}$ e $x'_A(t_0) = v_A(t_0) = 5\,\mathrm{m/s}$, concluímos que

$$d'(t_0) = \frac{(12\,\mathrm{m})(-3\,\mathrm{m/s})}{13\,\mathrm{m}} = -\frac{36}{13}\,\mathrm{m/s},$$

isto é, os objetos se aproximam com velocidade igual a $\dfrac{36}{13}\,\mathrm{m/s}$.

Questão 4: (3.0 pontos)

Considere a função $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, definida para $x > 0$ e $x \neq 1$.

(a) Calcule:

(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$;

(ii) $\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$;

(iii) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$;

(iv) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$;

(b) Determine, se existirem:

(i) As assíntotas verticais e horizontais de f;

(ii) Os intervalos onde f é crescente e onde f é decrescente;

(iii) Os pontos de máximo e mínimo locais e/ou globais de f (abscissa e ordenada);

(iv) Os intervalos onde f tem concavidade para cima (convexa), concavidade para baixo (côncava) e os pontos de inflexão de f;

(c) Faça um esboço do gráfico de f.

Solução:

(a) (i) Como $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ e $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, então

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\ln x} = 0.$$

(ii) Como $\lim_{x\to\infty} x = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} \ln x = \infty$, aplicando a Regra de l'Hôpital, obtemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x)'}{(\ln x)'} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} x = \infty.$$

(iii) Quando $x \to 1^-$, $\ln x$ tende a zero por valores negativos. Assim,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{\ln x} = -\infty.$$

(iv) Por outro lado, quando $x \to 1^+$, $\ln x$ tende a zero por valores positivos. Portanto,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{\ln x} = \infty.$$

(b) (i) De acordo com os resultados obtidos nos itens (i), (iii) e (iv) de (a), concluímos que f possui apenas uma assíntota vertical: $x = 1$. Já o resultado do item (ii) nos diz que f não possui assíntotas horizontais.

(ii) Calculando a derivada de f pela Regra do Quociente, obtemos:

$$f'(x) = \frac{1 \cdot \ln x - x \cdot \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$

Assim,

- $f'(x) > 0$ se $\ln x - 1 > 0$, ou seja, para $x \in (\mathrm{e}, \infty)$;
- $f'(x) < 0$ se $\ln x - 1 < 0$, ou seja, para $x \in (0, 1) \cup (1, \mathrm{e})$.

Portanto, concluímos que a função f é *crescente* no intervalo (e, ∞) e *decrescente* nos intervalos $(0, 1)$ e $(1, \mathrm{e})$.

(iii) Como $f'(\mathrm{e}) = 0$ e $f'(x)$ existe para todo x no domínio de f, então o único ponto crítico de f é $(\mathrm{e}, f(\mathrm{e})) = (\mathrm{e}, \mathrm{e})$. Além disso, como $f'(x) < 0$ para $x < \mathrm{e}$, e $f'(x) > 0$ para $x > \mathrm{e}$, então (e, e) é um ponto de *mínimo local* de f. Sendo este o único ponto crítico, então f não possui pontos de máximo local. Por fim, do item (a), sabemos que $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} f(x) = \infty$. Portanto, f *não* possui pontos de máximo ou mínimo globais.

(iv) Derivando a função $f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x)^{-2}$, obtemos

$$f''(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^{-2} - 2(\ln x - 1)(\ln x)^{-3}\frac{1}{x}$$

$$\Rightarrow f''(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}\left(\frac{2}{\ln x} - 1\right).$$

Como $1/(x(\ln x)^2)$ é sempre positivo no domínio de f, o sinal de f'' é determinado pelo sinal do termo $((2/\ln x) - 1)$. Assim,

- $f''(x) > 0$ se $((2/\ln x) - 1) > 0$, ou seja, para $x \in (1, e^2)$;
- $f''(x) < 0$ se $((2/\ln x) - 1) < 0$, ou seja, para $x \in (0, 1) \cup (e^2, \infty)$.

Com isto, concluímos que f tem concavidade para cima (convexa) no intervalo $(1, e^2)$, e tem concavidade para baixo (côncava) nos intervalos $(0, 1)$ e (e^2, ∞). Além disso, como $x = e^2$ é o único ponto do domínio de f onde f'' muda de sinal, então f tem um único ponto de inflexão: $(e^2, f(e^2)) = (e^2, e^2/2)$.

(c) Esboço do gráfico de f: