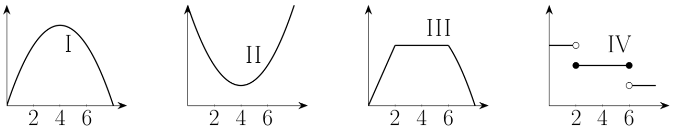
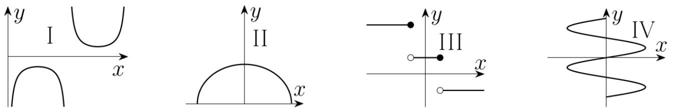
Instituto de Matemática - IM/UFRJ
Cálculo Diferencial e Integral I — P1 — 14/09/2023
BOA PROVA!

Q1: Seja $f(x)$ uma função tal que: $f'(x) > 0$ para $0 < x < 2$; $f'(x) = 0$ para $x \in (2, 6)$; e para $x > 6$, a inclinação da reta tangente ao gráfico de $f(x)$ é negativa.
Qual dos gráficos representa f?



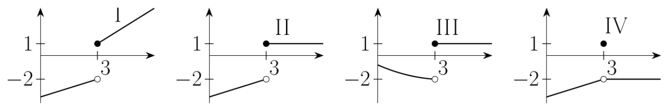
(A) III (B) I (C) II (D) IV (E) Nenhum

Q2: Qual dos gráficos abaixo **não** é um gráfico de função $y = f(x)$?



(A) IV (B) I (C) II (D) III (E) Nenhum

Q3: Considere uma função $f(x)$ tal que: $f'(x)$ é constante positiva para $x < 3$; $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$; $\lim_{x\to 3^+} f(x) = 1$; $f(3) = 1$; $f'(x) = 0$ para $x > 3$. Qual dos gráficos representa f?

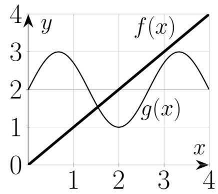


(A) II (B) I (C) III (D) IV (E) Todos

Q4: Considere que $f(x)$ é derivável e atinge valor máximo no ponto onde $f(1) = 2$. Qual é a equação da reta tangente ao seu gráfico nesse ponto?

(A) $y = 2$
(B) $y = 1$
(C) $y = x + 1$
(D) $y = -2x$
(E) Não há reta tangente.

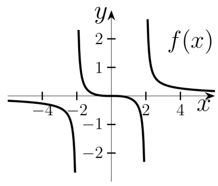
Q5: Na próxima figura, a reta representa o gráfico da função $f(x)$ (traço mais grosso), e o outro traço (mais fino) é o gráfico da função $g(x)$. Ambas são deriváveis.



Marque a única alternativa **verdadeira**.

(A) $g'(1) < 0 < f'(1)$ e $g'(2) = 0$.
(B) Existe $a \in [0, 4]$ onde $f(a) = g(a)$ e $f'(a) = g'(a)$.
(C) Para $x \in (0, 4)$ temos $f'(x) > 0$ e $g'(x) > 0$.
(D) $f'(x)$ é constante e $f(x) > g(x)$ para $x \in (0, 4)$.
(E) Em $0 < x < 4$, $f(x)$ e $g(x)$ são crescentes.

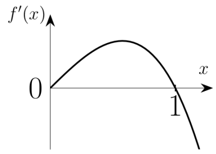
Q6: O gráfico abaixo representa a função $f(x)$.



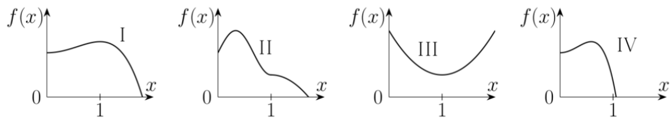
Marque a única alternativa **verdadeira**.

(A) $\lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty$.
(B) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -4$.
(C) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 4$.
(D) $\lim_{x\to -2^+} f(x) = -\infty$.
(E) $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.

Q7: A próxima figura representa o gráfico de $f'(x)$.



Qual dos gráficos representa $f(x)$?



(A) I (B) II (C) III (D) IV (E) Nenhum

Q8: Considere $f(x) = x^3 + 2$ e $g(x) = x^2 - 2$.
Calcule a derivada de $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$.

(A) $h'(x) = \dfrac{x^4 - 6x^2 - 4x}{(x^2 - 2)^2}$

(B) $h'(x) = \dfrac{x^4 - 4x^2 - 4x}{(x^2 - 2)}$

(C) $h'(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 2x}{(x^2 - 2)^2}$

(D) $h'(x) = \dfrac{x^4 - x^2 + 4x}{(x^2 - 2)^2}$

(E) $h'(x) = \dfrac{x^2 - 6x - 4}{(x^2 - 2)}$

Q9: De acordo com a tabela abaixo, utilize a taxa de variação média para identificar o intervalo em que a função $f(x)$ **cresce** mais rapidamente.

x	1.0	1.3	1.6	1.8	2.2	2.3
$f(x)$	120	150	180	208	228	220

(A) $[1.6, 1.8]$
(B) $[1.3, 1.6]$
(C) $[1.0, 1.3]$
(D) $[1.8, 2.2]$
(E) $[2.2, 2.3]$

Q10: Considere as funções $f(x) = 3x^7 - x^6 + 1$ e $g(x)$, ambas deriváveis. Sabendo que $g(-1) = 1$ e $g'(-1) = -1$, e que $h(x) = f(x)g(x)$, calcule $h'(-1)$.

(A) 30 (B) -1 (C) -27 (D) 20 (E) 40

Q11: Foi determinado que o gasto de energia durante a operação de um maquinário é dado pela função $E(L) = L^4 - 32L + 50$, onde $L \in (0, 10)$ é o comprimento, em metros, de uma peça importante para o funcionamento. Determine o comprimento que minimiza o gasto de energia durante a operação:

(A) 2 (B) 8 (C) $\sqrt[3]{32}$ (D) $\sqrt[4]{32}$ (E) 4

Q12: Seja $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 + 3x - 1$. Assinale a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $(2, 7)$.

(A) $y = 5x - 3$
(B) $y = 10x + 3$
(C) $y = x$
(D) $y = 5x + 5$
(E) $y = 5$

Q13: Considere a função $f(x) = 1 + \dfrac{x+2}{x^2-4}$ definida em $D = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq -2,\ x \neq 2\}$.
Quais afirmações são **verdadeiras**?

(I) As retas $x = 2$ e $x = -2$ são assíntotas verticais ao gráfico de $f(x)$.
(II) Não há assíntota vertical em $x = -2$ porque $\lim_{x\to -2} f(x) = \dfrac{3}{4}$.
(III) $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to -\infty} f(x) = 1$.
(IV) Não há assíntotas horizontais ao gráfico de $f(x)$.

(A) Apenas II, III são verdadeiras.
(B) Todas são falsas.
(C) Apenas I, IV são verdadeiras.
(D) Todas são verdadeiras
(E) Apenas III, IV são verdadeiras.

Q14: A reta r_s intercepta o gráfico da função $f(x) = x^4 - x + 1$ para $x = -1$ e $x = 1$. A reta r_p é a reta que cruza o eixo vertical em $y = 1$ e tem a mesma inclinação que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, 3)$. Qual é o valor da primeira coordenada do ponto de interseção de r_s e r_p.

(A) $-1/4$ (B) $-1/2$ (C) 1 (D) 2 (E) 0

Q15: Considere as funções deriváveis $f(x)$, $g(x)$, e $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$. Sabendo que $f(2) > 0$, $g(2) < 0$, $f'(2) > 0$, $g'(2) > 0$, o que sabemos sobre $h'(2)$?

(A) $h'(2) < 0$
(B) $h'(2) = 0$
(C) $h'(2) > 0$
(D) $h'(2)$ não está definido.
(E) Nada, porque depende de $h(2)$.

Q16: Sejam f e g definidas e deriváveis para todo x, tais que $f'(x) < 0$ e $g'(x) > 0$. Marque a única alternativa que é **sempre verdadeira** para todas as funções f e g que se encaixam nessas condições.

(A) $f(1) < f(0)$ e $g(1) > g(0)$.
(B) $f(1) < g(1)$ e $f(0) < g(0)$.
(C) $f(x) < g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(D) $f(x) < 0$ e $g(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.
(E) $f(x) > g(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.