Questão 1: (2 pontos)

(a) (0.4 ponto) Calcule o limite: $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1}$.

(b) (0.4 ponto) Calcule o limite: $\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi x+5}{\sqrt{4x^2+1}}\right)$.

(c) (0.4 ponto) Calcule a derivada da função $f(x) = x^2\cos(e^{\cos x})$.

(d) (0.4 ponto) Determine o valor de A para que a função $f(x)$ seja contínua, com

$$f(x) = \begin{cases} A(x-2), & \text{se } x \le 0 \\ \dfrac{-e^x}{e^x+1}, & \text{se } x > 0. \end{cases}$$

(e) (0.4 ponto) Determine a equação da reta tangente a curva $e^{x^2y} = 2x + 2y$ no ponto em que $x = 0$.

Solução:

(a)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{(x-1)(\sqrt{x^2+3}-2)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Como $\operatorname{sen} x$ é uma função contínua, temos

$$\lim_{x\to+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x+5}{\sqrt{4x^2+1}}\right) = \operatorname{sen}\left(\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x+5}{\sqrt{4x^2+1}}\right).$$

Mas

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\pi x+5}{\sqrt{4x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\pi \cancel{x}(1+\frac{5}{x})}{\cancel{x}\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}} = \pi/2.$$

Logo o limite desejado $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$.

(c)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x\cos(e^{\cos x}) - x^2\operatorname{sen}(e^{\cos x})(e^{\cos x})' \\ &= 2x\cos(e^{\cos x}) - x^2\operatorname{sen}(e^{\cos x})\cdot(-\operatorname{sen} x)(e^{\cos x}) = 2x\cos(e^{\cos x}) + x^2\operatorname{sen}(e^{\cos x})\cdot(\operatorname{sen} x)(e^{\cos x}) \end{aligned}$$

(d) Tem-se $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -2A$, e $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -1/2$, logo $A = 1/4$.

(e) Derivando implicitamente em relação a variável x obtemos

$$e^{x^2y}\left(2xy + x^2\frac{dy}{dx}\right) = 2 + 2\frac{dy}{dx}.$$

Resolvendo esta equação para $\frac{dy}{dx}$ obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2-2xye^{x^2y}}{x^2e^{x^2y}-2}.$$

Em $x = 0$ temos que $y = 1/2$ e a equação da reta tangente será

$$y = 1/2 - x$$

.

Questão 2: (2 pontos)

Considere a função $f(x)$ com derivadas $f'(x)$ e $f''(x)$ dada por

$$f(x) = \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)}, \quad f'(x) = \frac{504(1-x^2)}{(8x-1)^2(x-8)^2}, \quad f''(x) = \frac{1008(2x+5)(4x^2-10x+13))}{(8x-1)^3(x-8)^3}.$$

(a) (0.2 ponto) Dê o domínio de definição de f.

(b) (0.5 ponto) Determine as assíntotas horizontais e verticais, caso existam.

(c) (0.3 ponto) Identifique os pontos críticos, os extremos relativos e os intervalos onde a função f é crescente e onde é decrescente.

(d) (0.5 ponto) Encontre os pontos de inflexão de f, se houver, e os intervalos de concavidade para cima e para baixo.

(e) (0.5 ponto) Usando as informações anteriores faça um esboço do gráfico de $f(x)$.

Solução:

(a) A função f é bem definida se o denominador é desigual a 0. Daí, o domínio $\mathrm{dom}(f)$ é $\mathbb{R} \setminus \{8, \frac{1}{8}\}$.

(b) Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2(16 - 67x^{-1} + 16x^{-2})}{x^2(8 - x^{-1})(1 - 8x^{-1})} = \frac{16}{8} = 2.$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2(16 - 67x^{-1} + 16x^{-2})}{x^2(8 - x^{-1})(1 - 8x^{-1})} = \frac{16}{8} = 2.$$

Assíntotas verticais:

$$\lim_{x\to 8+} \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)} = \lim_{x\to 8+} \frac{1024 - 536 + 16}{63(x-8)} = \frac{504}{63} \lim_{x\to 8+} \frac{1}{x-8} = \infty$$

$$\lim_{x\to 8-} \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)} = \frac{504}{63} \lim_{x\to 8-} \frac{1}{x-8} = -\infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{8}+} \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{67}{8} + 16}{\frac{1}{8} - 8} \lim_{x\to \frac{1}{8}+} \frac{1}{8x-1} = \frac{2 - 67 + 128}{1 - 64} = \lim_{x\to \frac{1}{8}+} \frac{1}{8x-1}$$

$$= -\lim_{x\to \frac{1}{8}+} \frac{1}{8x-1} - \infty$$

$$\lim_{x\to \frac{1}{8}-} \frac{16x^2 - 67x + 16}{(8x-1)(x-8)} = -\lim_{x\to \frac{1}{8}-} \frac{1}{8x-1} = \infty$$

(c) As raízes de $(1-x^2)$ são 1 e -1 e estão no domínio de f. Daí, os pontos críticos (em $\mathrm{dom}(f)$) são 1 e -1. Além disso, como o denominador de f' é positivo em $\mathrm{dom}(f)$, tem-se para $x \in \mathrm{dom}(f)$ que

$$f'(x) > 0 \iff 1 - x^2 > 0 \iff x^2 < 1 \iff x \in (-1, 1)$$

$$f'(x) < 0 \iff 1 - x^2 < 0 \iff x^2 > 1 \iff x \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty).$$

Daí, f é estritamente crescente em $(-1,1) \cap \mathrm{dom}(f) = (-1,\frac{1}{8}) \cup (\frac{1}{8},1)$ e estritamente decrescente em $((-\infty,-1) \cup (1,\infty)) \cap \mathrm{dom}(f) = (-\infty,-1) \cup (1,8) \cup (8,\infty)$, implicando que f tem um mínimo relativo em -1 e um máximo relativo em 1. Os valores correspondentes são

$$f(-1) = \frac{16+67+16}{(-9)(-9)} = \frac{99}{9\cdot 9} = \frac{11}{9}, \quad f(1) = \frac{16-67+16}{7\cdot(-7)} = \frac{-35}{-7\cdot 7} = \frac{5}{7}$$

Solução alternativa para max/min.

$$f''(-1) = \frac{1008(-2+5)(4+10+13))}{(-9)^3(-9)^3} = \frac{1008\cdot 3\cdot 27}{9^6} > 0,$$
$$f''(1) = \frac{1008(2+5)(4-10+13))}{(7)^3(-7)^3} = -\frac{1008\cdot 7\cdot 7}{7^6} < 0.$$

(d) As raizes do numerador:

1. $2x+5=0 \iff x = -\frac{5}{2}$.
2. A discriminante de $4x^2-10x+13$ é $100-4^2\cdot 13 = -4 < 0$. Como $4>0$, $4x^2-10x+13>0$ para qualquer x.

Como o denominador é desigual a 0 no domínio de f, segue que $f''(x)=0$ se e somente se $x=-\frac{5}{2}$.

A concavidade de f:

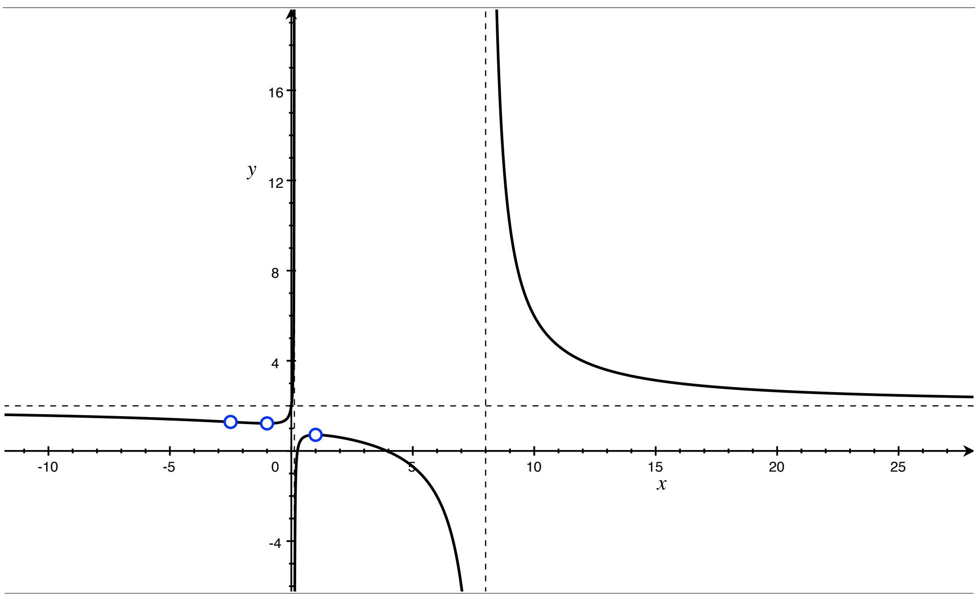
	$x<-\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}<x<\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}<x<8$	$x>8$
$2x+5$	<0	>0	>0	>0
$4x^2-10x+13$	>0	>0	>0	>0
$(8x-1)^3$	<0	<0	>0	>0
$(x-8)^3$	<0	<0	<0	>0
$f''(x)$	<0	>0	<0	>0
concavidade para	baixo	cima	baixo	cima

Os pontos de inflexão: Pela mudança de concavidade, há pontos de inflexão (no sentido amplo) em $-\frac{5}{2}$, $\frac{1}{8}$ e 8. Como os valores de f não são indeterminados em $\frac{1}{8}$ e 8, só tem um ponto de inflexão (no sentido estrito) em $-\frac{5}{2}$. Como

$$f(-5/2) = \frac{100+\frac{335}{2}+16}{-21\cdot\frac{-21}{2}} = \frac{567}{21^2} = \frac{9}{7},$$

o ponto tem coordenadas $(-\frac{5}{2},\frac{9}{7})$.

(e)



Questão 3: (1 ponto)

Sejam a, b e c números reais tais que $\frac{a}{3} + \frac{b}{2} + c = 0$. Mostre que o polinômio $p(x) = ax^2 + bx + c$ possui ao menos uma raíz no intervalo $(0, 1)$.

Dica. Use o polinômio $\frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$.

Solução:

Considere $f(x) = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b}{2}x^2 + cx$. Então, f derivável, $f'(x) = p(x)$, $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$. Pelo Teorema de Rolle, existe $x_0 \in (0, 1)$ tal que $f'(x_0) = p(x_0) = 0$.

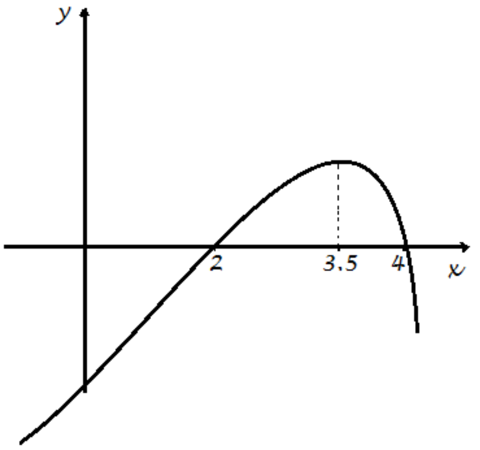
Questões objetivas: (5 pontos)

A resposta correta no gabarito da parte objetiva é a primeira opção.

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Disciplina: MAC 118 – Cálculo I
Data: 13 de outubro de 2016

P1 – Questões objetivas

1. Seja f derivável e suponha que o gráfico da derivada f' seja dado por:



Considere as seguintes afirmações:

(I) A função f tem um mínimo local em $x = 2$ e um máximo local em $x = 4$.
(II) O gráfico de f é côncavo para baixo em $x = 0$.
(III) A função f tem um ponto de inflexão em $x = 3,5$.

Então:

(a) Apenas as afirmações (I) e (III) estão corretas.
(b) Apenas as afirmações (II) e (III) estão corretas.
(c) Apenas as afirmações (I) e (II) estão corretas.
(d) Todas as afirmações estão corretas.
(e) Apenas a afirmação (I) está correta.

2. Suponha que f e g sejam, ambas, funções diferenciáveis satisfazendo $f'(x) > g'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Então podemos afirmar que os gráficos de $y = f(x)$ e de $y = g(x)$

(a) não possuem mais do que uma interseção.
(b) possuem exatamente interseção.
(c) podem possuir mais de uma interseção.
(d) não possuem interseção.
(e) têm uma reta tangente em comum no ponto de interseção.

3. Sobre a equação $\cos(x) = x$ é correto afirmar:

(a) Admite solução no intervalo $[0, 1]$.
(b) Não admite solução real.
(c) Admite solução no intervalo $[1, +\infty)$.
(d) Admite solução no intervalo $(-\infty, -1]$.
(e) Admite solução no intervalo $[-1, 0]$.

4. Sejam f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis tais que

$$f(1) = 2,\ f'(1) = 3,\ g(2) = 2,$$
$$g'(2) = -1,\ g(1) = 2,\ g'(1) = 2.$$

Então a derivada da função $h(x) = f(x) \cdot (g \circ f)(x)$ no ponto $x_0 = 1$ é:

(a) 0.
(b) 3/4.
(c) 3/2.
(d) 1.
(e) 1/2.

5. A reta $x + y = 1$ é paralela à reta tangente à elipse $(x^2/2) + y^2 = 1$ num ponto P_0 com coordenadas:

(a) $x_0 = 2\sqrt{3}/3, \quad y_0 = \sqrt{3}/3$.
(b) $x_0 = -2\sqrt{3}/3, \quad y_0 = \sqrt{3}/3$.
(c) $x_0 = 2\sqrt{3}/3, \quad y_0 = -\sqrt{3}/3$.
(d) $x_0 = \sqrt{2/3}, \quad y_0 = \sqrt{2/3}$.
(e) $x_0 = -\sqrt{2/3}, \quad y_0 = -\sqrt{2/3}$.

6. Suponha que $\left| f(x) - \dfrac{e^x - 1}{\sqrt[3]{x+1} - 1} \right| \leq x^2$ para todo $x \neq 0$. Sobre o limite $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ é correto afirmar que:

(a) Seu valor é 3.
(b) Seu valor é 2.
(c) Seu valor depende de qual é a função f.
(d) Seu valor é 0.
(e) Seu valor é 1.

7. Suponha que $|f(x)| \leq x^2$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Considere as seguintes afirmações:

(I) f é contínua em $x = 0$.
(II) f é diferenciável em $x = 0$.
(III) $f'(0) = 0$.

É verdadeira ou são verdadeiras:

(a) Todas as três afirmações.
(b) Somente a afirmativa (II).
(c) Somente a afirmativa (I).
(d) Nenhuma das afirmativas.
(e) As afirmativas (I) e (II).

8. Considere uma função $y = f(x)$ satisfazendo

$$\lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = 0.$$

Então, vale necessariamente que:

(a) $f'(2) = 0$.
(b) $\lim_{x \to 2} f(x)$ não existe.
(c) f não está definida em $x = 2$.
(d) f é contínua em $x = 0$.
(e) $f(2) = 0$.

9. Seja $y = f(x)$ uma função duas vezes diferenciável. Considere
$$y = g(x) = e^{f(x)}.$$
Então $g''(x) = h(x)e^{f(x)}$, onde $h(x) =$
   (a) $(f'(x))^2 + f''(x)$.
   (b) $(f''(x))^2 + f'(x)$.
   (c) $(f'(x) + f''(x))^2$.
   (d) $f'(x) + f''(x)$.
   (e) $2f'(x) + f''(x)$.

10. Considere a reta tangente ao gráfico de $y = f(x) = 5x^2 - 7x + 14/5$ em $(2/5, 4/5)$. Se (a, b) está nessa reta então:
   (a) $3a + b = 2$.
   (b) $a + 3b = 2$.
   (c) $a + 2b = 3$.
   (d) $2a + b = 3$.
   (e) $3a - b = 2$.