Questão 1: (2.5 pontos)

Determine os pontos da curva

$$x^3 + 4y^2 - 6xy = 0,$$

com coordenada $x > 0$, onde a reta tangente é paralela ao eixo x.

Solução:

A reta tangente à curva num determinado ponto é paralela ao eixo x se seu coeficiente angular for nulo. Portanto, devemos determinar os pontos da curva com coordenada x positiva e tais que $y' = 0$. Derivando implicitamente:

$$3x^2 + 8yy' - 6y - 6xy' = 0,$$

de onde segue que

$$y' = \frac{3x^2 - 6y}{6x - 8y}. \tag{1}$$

Assim, pontos da curva com $y' = 0$ satisfazem

$$3x^2 - 6y = 0 \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}x^2. \tag{2}$$

Substituindo essa expressão na equação da curva obtemos a equação

$$x^3 + x^4 - 3x^3 = x^3(x-2) = 0,$$

que tem como solução $x = 0$ ou $x = 2$. De acordo com o enunciado, não devemos considerar o caso $x = 0$; no caso $x = 2$ segue de (2) que $y = 2$. Observe que o denominador em (2) não se anula em $\mathcal{P} = (2, 2)$, que é o único ponto com coordenada x positiva em que a tangente é horizontal.

Questão 2: (3 pontos)

Considere a função $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$. Determine

1. o domínio de f,
2. os intervalos onde f é estritamente crescente e decrescente,
3. os intervalos de convexidade (concavidade para cima) e concavidade (concavidade para baixo) de f,
4. os pontos de máximo e de mínimo (se houver),
5. as assíntotas verticais e horizontais (se houver).

Dica: *Um esboço do gráfico pode ser útil para conferir seus resultados.*

Solução:

1. O domínio da função é o conjunto $\mathcal{D} = (0, \infty)$.

2. A derivada de f é dada pela expressão

$$f'(x) = \tfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} \;=\; \tfrac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\Big(x - \tfrac{1}{2}\Big),$$

assim $f'(x) > 0$ se, e somente se, $x > \frac{1}{2}$. Portanto, f é estritamente decrescente no intervalo $(0, \frac{1}{2})$ e estritamente crescente no intervalo $(\frac{1}{2}, \infty)$.

3. A segunda derivada de f é dada pela expressão

$$f''(x) = -\tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}} + \tfrac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}} \;=\; \tfrac{1}{4}x^{-\frac{5}{2}}\Big(-x + \tfrac{3}{2}\Big),$$

assim $f''(x) > 0$ se, e somente se, $x < \frac{3}{2}$. Portanto, f é côncava para cima (também chamado de convexa) no intervalo $(0, \frac{3}{2})$ e côncava para baixo (também chamado de côncava) no intervalo $(\frac{3}{2}, \infty)$.

4. De acordo com o segundo item, pelo teste da primeira derivada, o ponto $x_0 = \frac{1}{2}$ é um ponto de mínimo global. Não há pontos de máximo.

5. Temos que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \infty$, assim a função tem uma assíntota vertical em $x = 0$. Como $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ a função não tem assíntota horizontal.

Solução alternativa para o item 4: A função $f(x)$ pode ser reescrita, via completamento quadrático, na forma

$$f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} = \left(\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{4x}}\right)^2 + \sqrt{2} \geq \sqrt{2}.$$

Assim, o menor valor possível de f é $\sqrt{2}$, o qual é obtido quando $\sqrt[4]{x} - \frac{1}{\sqrt[4]{4x}} = 0$, ou seja quando $x = \frac{1}{2}$.

Questão 3: (2 pontos)

Calcule o limite abaixo, justificando sua resposta:

$$\lim_{x\to 0}\left[\left(\frac{\cos(x^2) - 1}{x}\right)\cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right].$$

Solução:

Primeiro notamos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x^2) - 1}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos^2(x^2) - 1}{x(\cos(x^2) + 1)} = \lim_{x\to 0} -\frac{\operatorname{sen}^2(x^2)}{x(\cos(x^2) + 1)} =: \boldsymbol{L},$$

que, multiplicando e dividindo por x, pode ser calculado como segue

$$\boldsymbol{L} = \lim_{x\to 0} -\frac{x\operatorname{sen}^2(x^2)}{x^2(\cos(x^2) + 1)} = -\lim_{x\to 0}\Big(x\operatorname{sen}(x^2)\Big)\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos(x^2) + 1} = -0\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = 0.$$

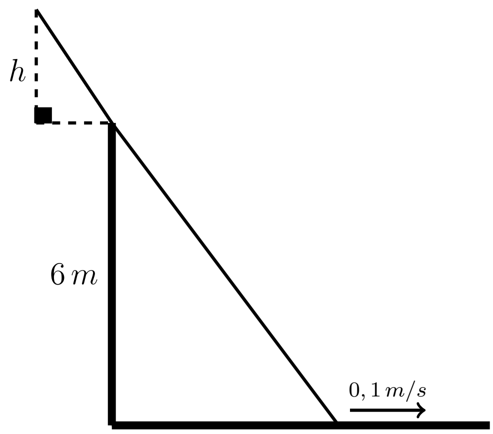
Por outro lado, $\lim_{x\to 0} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$ não existe! No entanto, aplicando o Teorema do Confronto podemos garantir que o limite solicitado é zero. De fato, como $\left|\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant 1$ temos que

$$0 \leqslant \left|\frac{\cos(x^2)-1}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqslant \left|\frac{\cos(x^2)-1}{x}\right| \xrightarrow{x\to 0} 0,$$

Assim, o limite $\lim_{x\to 0} \left|\frac{\cos(x^2)-1}{x} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0$, de onde segue que $\lim_{x\to 0} \left[\left(\frac{\cos(x^2)-1}{x}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$.

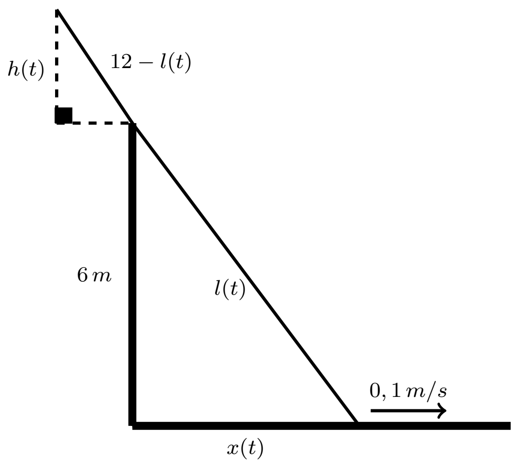
Questão 4: (2.5 pontos)

Uma escada de $12\,m$ de comprimento está apoiada em um muro de $6\,m$ de altura, conforme representado na figura. A base da escada desliza pelo chão, afastando-se do muro, com velocidade constante de $0,1\,m/s$. Determinar a taxa de variação instantânea da altura h, indicada na figura, no instante em que a base da escada está a uma distância de $6\,m$ do muro.



Solução:

Denotamos por $x(t)$ a distância da base da escada até o muro, no instante de tempo t, e por $l(t)$ o comprimento da parte da escada que se localiza entre o muro e o chão.



Usando semelhança de triângulos temos a relação

$$\frac{h(t)}{6} = \frac{12 - l(t)}{l(t)} = \frac{12}{l(t)} - 1,$$

de onde segue que

$$h(t) = \frac{72}{l(t)} - 6 = \frac{72}{\sqrt{36 + x^2(t)}} - 6 = 72\Big[36 + x^2(t)\Big]^{-\frac{1}{2}} - 6.$$

Derivando h temos

$$h'(t) = -72\Big[36 + x^2(t)\Big]^{-\frac{3}{2}} x(t)x'(t).$$

Assim, no instante de tempo t_0 em que $x(t_0) = 6\,m$ temos que

$$h'(t_0) = -72 \cdot 72^{-\frac{3}{2}} \cdot 6 \cdot 0,1 = -\frac{\sqrt{2}}{20}\,m/s.$$

O sinal negativo indica que o comprimento h está diminuindo nesse instante.