INSTITUTO DE MATEMÁTICA
Universidade Federal do Rio de Janeiro

Gabarito da 1ª Prova Unificada de Cálculo I

1ª Questão: Calcule ou justifique caso não exista, cada um dos limite abaixo:

$$(a)\ \lim_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2}, \quad (b)\ \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3x+3}\right);$$

$$(c)\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3\cos(x)}{3x^4+2x^2-10}.$$

Solução: (a) Observemos que

$$\lim_{x\to+\infty}(1+x^2)e^{-x^2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{e^{x^2}} = \frac{\infty}{\infty}.$$

Com este tipo de indeterminação podemos aplicar a Regra de L'Hospital. Então,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1+x^2}{e^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{2xe^{x^2}} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}} = 0.$$

(b) Como a indeterminação é do tipo "$\infty - \infty$", podemos contorná-la considerando as identidades

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3x+3} &= \frac{3x}{\sqrt{x^2+3}+\sqrt{x^2-3x+3}} \\ &= \frac{3x}{|x|\sqrt{1+3/x^2}+|x|\sqrt{1-3/x+3/x^2}}.\end{aligned} \tag{0.1}$$

Para $x<0$, temos $x/|x| = -1$, de modo que (0.1) toma a forma

$$\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3x+3} = \frac{-3}{\sqrt{1+3/x^2}+\sqrt{1-3/x+3/x^2}}.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}-\sqrt{x^2-3x+3}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-3}{\sqrt{1+3/x^2}+\sqrt{1-3/x+3/x^2}}\right) = -\frac{3}{2}.$$

(c) Como $-1\le\cos(x)\le 1$ e, para $x>0$ suficientemente grande, $3x+2x^{-1}-10x^{-3}>0$, temos

$$\frac{-1}{3x+2/x-10/x^3} \le \frac{\cos(x)}{3x+2/x-10/x^3} \le \frac{1}{3x+2/x-10/x^3}.$$

Como

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{3x+2/x-10/x^3}\right)=0,$$

segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\cos(x)}{3x+2/x-10/x^3}\right)=0.$$

2ª Questão: Sabendo-se que a reta tangente no ponto P_0 sobre a curva $y^2+y=2x$ faz um ângulo de $30°$ com o eixo x, determine as coordenadas de P_0.

Solução: Seja $P_0=(x_0,y_0)$ o ponto sobre o qual a reta tangente à curva faz uma ângulo de 30 graus com o eixo dos x. Derivando a equação implicitamente em relação a x, obtemos

$$2yy'+y'=(2y+1)y'=2. \tag{0.2}$$

Como $y'(x_0)$ é a tangente do ângulo em relação ao eixo x, temos $y'(x_0)=\mathrm{tg}(\pi/6)=\sqrt{3}/3$. Logo, $2y(x_0)+1=2\sqrt{3}$, de onde se conclui que $y_0=y(x_0)=\sqrt{3}-\frac{1}{2}$.
Para se determinar a abscissa de P_0, substituímos o valor de y_0 na equação original. Assim,

$$2x_0=y_0^2+y_0=\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\sqrt{3}-\frac{1}{2}\right)=\frac{11}{4}.$$

Portanto, as coordenadas de P_0 são

$$x_0=\frac{11}{8},\quad y_0=\sqrt{3}-\frac{1}{2}.$$

Observação: Uma solução alternativa é a de considerar x como função de y, isto é, $x=f(y):=(y^2+y)/2$. Nesse caso, a reta tangente que passa por P_0 faz um ângulo de 60 graus com o eixo y, de modo $x'(y_0)=\mathrm{tg}(\pi/3)=\sqrt{3}$. Como $x'(y)=y+1/2$, temos

$$x'(y_0)=y_0+1/2=\sqrt{3}\quad\Rightarrow\quad y_0=\sqrt{3}-1/2.$$

E assim, podemos, como antes, calcular o valor de x_0, substituindo o valor de y_0 na equação original.

3ª Questão: Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ a função definida por $f(x)=x^2e^{-x}$.

(a) Encontre as assíntotas verticais e horizontais caso existam;
(b) Encontre os intervalos onde a função é crescente e onde é decrescente;
(c) Encontre os valores de máximo e mínimo locais;
(d) Encontre os intervalos de concavidade e os pontos de inflexão;
(e) Use as informações acima para fazer um esboço do gráfico de f.

Solução: (a) A função f é contínua em todos os pontos de $\mathbb{R}$. Logo, não há assíntotas verticais. Entretanto, aplicando duas vezes a Regrade L'Hospital, obtemos

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

Logo, a reta horizontal de equação $y = 0$ (i.e., o eixo x) é assíntota horizontal em $+\infty$. Vale observar que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{e^x} = +\infty.$$

Portanto, não há assíntota horizontal relativamente a $-\infty$.
(b) Como f é diferenciável em $\mathbb{R}$, podemos determinar os intervalos de crescimento e decrescimento observando o sinal de f':

$$f'(x) \geq 0 \iff 2xe^{-x} - x^2e^{-x} \geq 0 \iff 2x - x^2 \geq 0 \iff x \in [0, 2].$$

Assim, f é crescente no intervalo $[0, 2]$ e necessariamente decrescente em cada um dos intervalos $(-\infty, 0]$ e $[2, +\infty)$.
(c) Pelo que se depreende do item (b), $x = 0$ é ponto de mínimo local e $x = 2$ é ponto de máximo local de f. Assim,

$$\begin{cases} f(0) = 0 \text{ é valor mínimo local de } f; \\ f(2) = 4e^{-2} \text{ é valor máximo local de } f; \end{cases}$$

(d) Como f é duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, podemos estudar a convexidade/concavidade de f observando o sinal de f'':

$$f''(x) \geq 0 \iff (2 - 4x + x^2)e^{-x} \geq 0 \iff x^2 - 4x + 2 \geq 0.$$

Calculando as raízes da equação $x^2 - 4x + 2 = 0$, obtemos

$$x_1 = 2 - \sqrt{2}, \quad x_2 = 2 + \sqrt{2}.$$

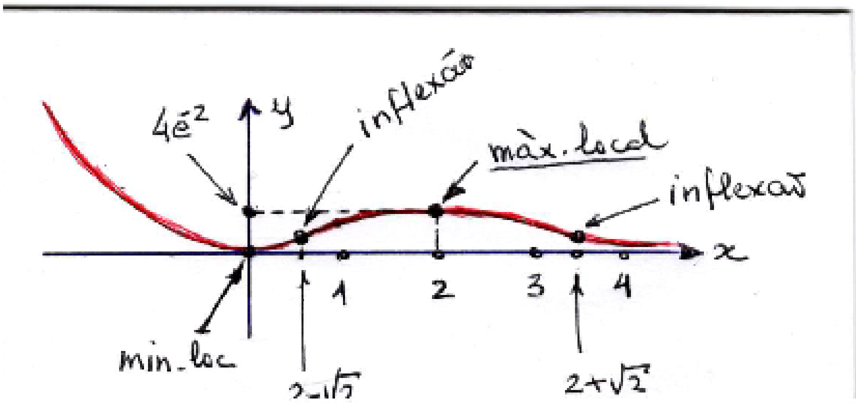
Portanto,

$$f''(x) \geq 0 \iff x \in (-\infty, 2 - \sqrt{2}] \cup [2 + \sqrt{2}, +\infty),$$

isto é, f é convexa (concavidade para cima) em cada um dos intervalos

$$(-\infty, 2 - \sqrt{2}] \quad \text{e} \quad [2 + \sqrt{2}, +\infty)$$

e necessariamente côncava (concavidade para baixo) no intervalo $[2 - \sqrt{2}, 2 + \sqrt{2}]$. Consequentemente, os pontos de abscissa $x_1 = 2 - \sqrt{2}$ e $x_2 = 2 + \sqrt{2}$ são ponto de inflexão.



$4^{\underline{a}}$ Questão: Uma partícula se move sobre a elipse $x^2/4 + y^2/2 = 1$ (x e y medidos em metros) deslocando-se no sentido anti-horário. No instante t_0 em que ela passa pelo ponto $P = (1, \sqrt{3/2})$, sua coordenada x decresce a uma taxa de 3 m/s. Quão rápido está variando a distância da partícula à origem $(0,0)$ nesse instante t_0?

Solução: Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as coordenadas da posição da partícula sobre a elipse no instante t. Então,

$$\frac{x(t)^2}{4} + \frac{y(t)^2}{2} = 1. \tag{0.3}$$

Sabe-se que no instante t_0,

$$x(t_0) = 1, \quad y(t_0) = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}, \quad x'(t_0) = -3.$$

Derivando implicitamente a equação (0.3) em relação a t, tem-se

$$\frac{1}{2}x(t)x'(t) + y(t)y'(t) = 0.$$

Substuindo na equação acima os valores conhecidos, tem-se

$$-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}y'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad y'(t_0) = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$

A distância da partícula em relação à origem do sistema de coordenadas no instante t é:

$$D(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}.$$

Derivando em relação a t, obtemos

$$D'(t) = \frac{x(t)x'(t) + y(t)y'(t)}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}},$$

de modo que, no instante t_0,

$$D'(t_0) = -\frac{3\sqrt{10}}{10}.$$

5ª Questão: Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} a & \text{se } x = 0; \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{x-2}}{x} & \text{se } x \neq 0. \end{cases}.$$

(a) Determine o valor de $a \in \mathbb{R}$ para que f seja contínua em $x = 0$;

(b) Use a definição de derivada para mostrar que f não é derivável em $x = 2$.

Solução: (a) f é contínua em $x = 0$ se, e somente se,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = a.$$

Como o limite do produto é igual ao produto dos limites (caso existam) e

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x-2} = -\sqrt[3]{2},$$

segue que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \times \lim_{x\to 0} \sqrt[3]{x-2} = -\sqrt[3]{2}.$$

Portanto, a condição para que f seja contínua em $x = 0$ é $a = -\sqrt[3]{2}$.

(b) Por definição, f é derivável em $x = 2$ se existe o limite

$$\lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x-2}. \tag{0.4}$$

Oservemos que $f(2) = 0$, de modo que

$$\frac{f(x) - f(2)}{x-2} = \frac{\operatorname{sen}(x)\sqrt[3]{x-2}}{x(x-2)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\frac{1}{(x-2)^{2/3}}.$$

Como

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \frac{\operatorname{sen}(2)}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^{2/3}} = +\infty,$$

concluímos que o limite em (0.4) não existe. Portanto f não é derivável em $x = 2$.