— QUESTÕES DE MÚLTIPLA ESCOLHA —

1ª Questão: (2.0 pts) Indique a opção correta dos itens de múltipla-escolha abaixo no quadro adequado do caderno de respostas:

I) Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável com $f(1) = 4$ e $f(3) = 8$, e considere as afirmações abaixo:

A) f possui pelo menos uma raiz

B) Para algum $c \in (1, 3)$ vale que $f(c) = 5$.

C) Para algum $c \in (1, 3)$ vale que $f'(c) = 2$.

Escolha a alternativa correta:

a) Somente A é verdadeira

b) Somente B é verdadeira

c) Somente C é verdadeira

d) A e B são verdadeiras

e) **B e C são verdadeiras**

f) Todas são verdadeiras

g) Todas são falsas

II) Considere as afirmações abaixo:

A) Se uma função é côncava para cima então ela é necessariamente crescente em todo seu domínio

B) O gráfico de uma função pode interceptar o eixo vertical mais de uma vez

Classifique-as como verdadeira ou falsa:

a) **Ambas são falsas**

b) Ambas são verdadeiras

c) A é falsa e B é verdadeira

d) A é verdadeira e B é falsa

III) Seja $f(x)$ uma função qualquer, e considere as afirmações abaixo:

A) A reta tangente a $f(x)$ em um dado ponto pode interceptar seu gráfico em outro ponto

B) $f(x)$ possui reta tangente em todo ponto de seu gráfico

Classifique-as como verdadeira ou falsa:

a) Ambas são falsas

b) Ambas são verdadeiras

c) A é falsa e B é verdadeira

d) **A é verdadeira e B é falsa**

IV) O limite $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \frac{ax^{2018} + b}{cx^{2018} + d}$ é igual a: a) $\mathbf{a/c}$ b) b/d c) 0 d) $-\infty$ e) $+\infty$

— VIRE A PÁGINA — QUESTÕES DISCURSIVAS NO VERSO —

— QUESTÕES DISSERTATIVAS — JUSTIFIQUE TODAS SUAS RESPOSTAS —

2ª Questão: (1.5 pts) Considere a função f definida como

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|3x-1| - |3x+1|}{x}, & \text{para } x > 0, \\ a, & \text{para } x = 0, \\ \dfrac{\text{sen}(ax)}{x}, & \text{para } x < 0. \end{cases}$$

Determine o valor de a para que tenhamos f contínua em $\mathbb{R}$.

Resolução: Primeiramente, notemos que o único potencial ponto de descontinuidade de f é para $x = 0$. Agora, calculando os limites laterais de f quando x vai a zero, temos que:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} f(x) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{|3x-1| - |3x+1|}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-(3x-1) - (3x+1)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{-6x}{x} \\ &= -6. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^-} f(x) &= \lim_{x\to 0^-} \frac{\text{sen}(ax)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^-} a\frac{\text{sen}(ax)}{ax} \\ &\overset{y=ax}{=} \lim_{y\to 0} a\frac{\text{sen}(y)}{y} \\ &= a. \end{aligned}$$

Para que tenhamos f contínua em 0 devemos ter $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = a$, ou seja $a = -6$.

3ª Questão: (2.0 pts) Faça o que se pede abaixo:

a) Calcule a derivada de $\exp\left(\dfrac{\text{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}\right)$, onde $\exp(y)$ denota a função e^y.

b) Considere a função f dada por $f(x) = x^2 + \sqrt{x^3} + 8\ln(x)$. Seja a função g tal que seu valor em $x = 2$ vale 4 e sua derivada nesse mesmo valor vale 3. Calcule $(f \circ g)'(2)$.

Solução:

a) Temos que:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}\right)' &= \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}\right)\left[\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}\right]' \\
&= \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x})}\right)\left[\frac{(\sqrt{x})(\operatorname{sen}(x^2))' - \operatorname{sen}(x^2)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2}\right] \\
&= \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}\right)\left[\frac{2x\sqrt{x}\cos(x^2) - \operatorname{sen}(x^2)/2\sqrt{x}}{x}\right] \\
&= \exp\left(\frac{\operatorname{sen}(x^2)}{\sqrt{x}}\right)\left[2\sqrt{x}\cos(x^2) - \frac{\operatorname{sen}(x^2)}{2\sqrt{x^3}}\right].
\end{aligned}$$

b) Queremos calcular $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2)$. Sabemos do enunciado que $g(2) = 4$ e que $g'(2) = 3$. Calculemos quem é $f'(g(2)) = f'(4)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2x + \frac{3}{2}\sqrt{x} + \frac{8}{x} \\
\Rightarrow f'(4) &= 8 + \frac{3}{2}\sqrt{4} + \frac{8}{4} = 13.
\end{aligned}$$

Dessa forma, o resultado desejado é dado por $(f \circ g)'(2) = f'(g(2))g'(2) = 13 \times 3 = 39$.

4ª Questão: (2.5 pts) Considere a função $f(x) = xe^{-x}$, sendo suas derivadas primeira e segunda dadas, respectivamente, por $f'(x) = e^{-x}(1-x)$ e $f''(x) = e^{-x}(x-2)$. Siga o roteiro abaixo para esboçar um gráfico de f:

I) Encontre as raízes de f

II) Encontre as assíntotas horizontais e verticais de f, caso existam

III) Identifique os intervalos onde f é crescente e decrescente

IV) Encontre os pontos de máximo e mínimo locais de f, caso existam

V) Identifique os intervalos onde f é côncava para cima ou para baixo, e encontre os seus pontos de inflexão, caso existam

VI) Com base nas informações acima, esboce um gráfico de f

Solução:

I) Fazendo $f(x) = xe^{-x} = 0$ temos que a única raiz é em $x = 0$.

II) Como f está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, não há candidatos a assíntota vertical. Para assíntotas horizontais, calculemos os limites abaixo:

- $\lim\limits_{x\to\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x'}{(e^x)'} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty$, pois o primeiro termo vai para $-\infty$ e o segundo vai para ∞.

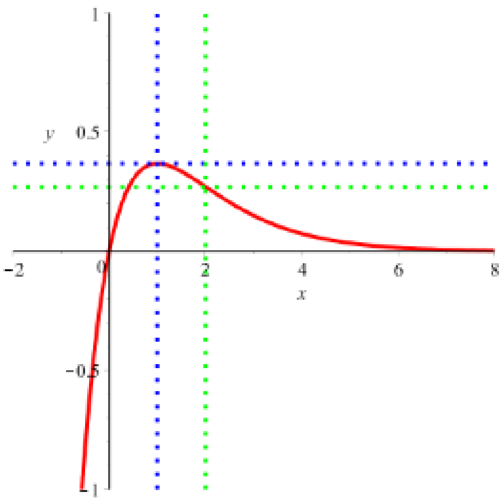
Dessa forma, temos uma assíntota horizontal em $y = 0$.

III) Note que os pontos críticos de f satisfazem $f'(x) = e^{-x}(1-x) = 0$, de modo que somente $x = 1$ é ponto crítico. Como $f'(x)$ é negativa para $x > 1$ e positiva para $x < 1$, temos que f é crescente no intervalo $(-\infty, 1)$ e decrescente no intervalo $(1, \infty)$.

IV) Pela análise de sinais de f' feita no item anterior, temos que f tem um máximo local para $x = 1$, e nenhum mínimo local.

V) Notamos que $f''(x)$ é positiva quando $x > 2$ e negativa quando $x < 2$, de modo que f é côncava para cima no intervalo $(2, \infty)$ e côncava para baixo no intervalo $(-\infty, 2)$. Dessa forma, o único ponto de inflexão de f é para $x = 2$.

VI)



5ª Questão: (2.0 pts) Um caminhão despeja cimento sobre o solo, que se acumula em um monte da forma de um cone, cuja altura é igual ao raio da base. Se o volume de cimento aumenta a uma taxa de $10\text{m}^3/\text{s}$, a que razão aumenta a área da base do monte formado pelo cimento, quando sua altura é de 4m?

Solução: Denote por V o volume de cimento, h a altura do monte, r o raio da base e A a área da base. Sabemos que o volume do cone e a área da base são dados, respectivamente, por $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ e $A = \pi r^2$. Do enunciado temos que $r = h$, de modo que podemos reescrever V como $V = \frac{1}{3}\pi r^3$. Queremos determinar $A'(t)$ quando $r = 4\text{m}$.

Derivando A em relação a t, temos que: $A'(t) = \frac{d}{dt}\pi r(t)^2 = 2\pi r(t) r'(t)$.

Derivando V em relação a t, temos que: $V'(t) = \frac{d}{dt}\frac{1}{3}\pi r(t)^3 = \pi r(t)^2 r'(t)$.

Como o enunciado nos informa que $V'(t) = 10\text{m}^3/\text{s}$, temos que $r'(t) = \frac{10}{\pi r(t)^2}$, que substituindo na fórmula para $A'(t)$ nos dá que $A'(t) = 2\pi r(t) r'(t) = \frac{20}{r(t)}$. Logo, quando $r = h = 4\text{m}$, e denotando por t_0 o tempo no qual isso acontece, temos que $A'(t_0) = 20/4 = 5\text{m}^2/\text{s}$.