Univerdidade Federal de Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Gabarito da Prova de Reposição Unificada de Cálculo I- 2015/2, 15/03/2016

1. (1,0 pontos) Usando o Teorema do Valor Médio provar que:

$$\frac{b-a}{b} < \log\left(\frac{b}{a}\right) < \frac{b-a}{a}$$

onde $0 < a < b$.

Solução:

Seja $f(x) = \ln(x)$, $f(x)$ é contínua e diferenciável em $[a, b]$ onde $0 < a < b$.

Pelo teorema do valor médio existe um ponto c em $a < c < b$ que satisfaz:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}$$

$$f'(c) = \frac{1}{c} = \frac{\ln(b) - \ln(a)}{b-a}$$

agora $a < c < b \to \frac{1}{a} > \frac{1}{c} > \frac{1}{b}$ substituindo $\frac{1}{c}$ temos:

$$\frac{1}{a} > \frac{\log(b) - \log(a)}{b-a} > \frac{1}{b}$$

$$\frac{b-a}{a} > \log\left(\frac{b}{a}\right) > \frac{b-a}{b}.$$

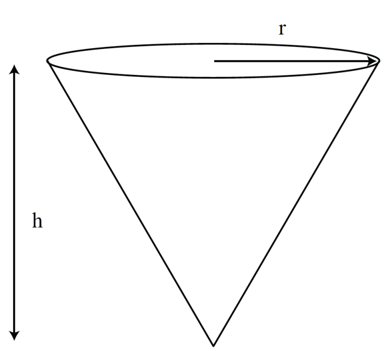
2. (2,0 pontos) Água escoa de um reservatório em forma de cone (com vértice para baixo) com raio da base de 36m e altura de 6m, a uma taxa de $50m^3$/min.

   (a) (1,0) Com que taxa o nível de água estara diminuindo quando este for de 5m de profundidade?

   (b) (1,0) Com que taxa o raio da superfície da água estará variando neste momento?

Solução: letra(a)

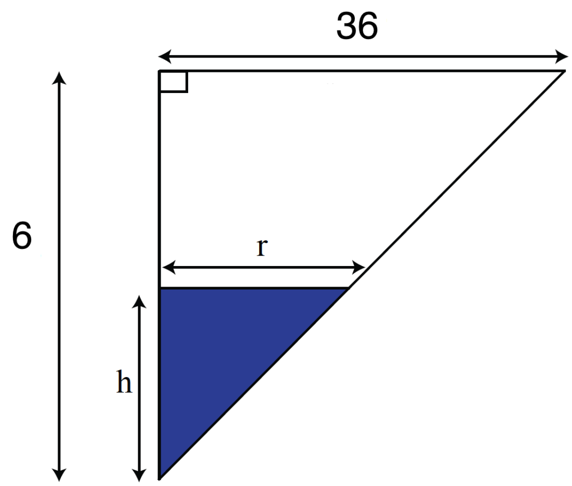
O reservatório pode ser esquematizado por:



O volume do cilíndro é dado por $V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h$, o tanque está esvaziando a uma taxa de $50m^3/\text{min}$ ou seja:

$$\frac{dV}{dt} = -50$$

queremos saber quanto é $\dfrac{dh}{dt}$ quando $h = 5$. Podemos relacionar r e h por semelhança de triângulos:



$$\frac{r}{h} = \frac{36}{6}$$

$$r = 6h$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3} 36\pi h^3 = 12\pi h^3$$

calculando dV/dt temos:

$$\frac{dV}{dt} = 36\pi h^2 \frac{dh}{dt}$$

se $dV/dt = -50$ e $h = 5$:

$$-50 = 36\pi 25 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{1}{18\pi}.$$

Solução:letra(b) Como

$$r = 6h$$

$$\frac{dr}{dt} = 6\frac{dh}{dt}$$

da letra (a):

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{6}{18\pi} = -\frac{1}{3\pi}.$$

3. (2,0 pontos)

   Calcule $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{sec^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t}+t^{-1}\right]dt$

   Solução:

   Pelo teorema fundamental do cálculo:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$

   Assim, para $f(t)=\dfrac{sec^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t}+t^{-1}$ e usando a regra da cadeia temos que

$$\lim_{x\to 0}\frac{d}{dx}\int_1^{\frac{1}{x}}\left[\frac{sec^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t}+t^{-1}\right]dt = \lim_{x\to 0} f\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = -\lim_{x\to 0}\frac{xsec^2 x + x}{x^2} = -\lim_{x\to 0}\frac{sec^2 x+1}{x}.$$

   Como $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sec^2 x+1}{x}=+\infty$ e $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{sec^2 x+1}{x}=-\infty$, então $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{d}{dx}\displaystyle\int_1^{\frac{1}{x}}\left[\dfrac{sec^2\left(\frac{1}{t}\right)}{t}+t^{-1}\right]dt$ não existe.

4. (2,0 pontos)

   Calcule as seguintes integrais

   (a) (1,0) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{sen^2x - senx}dx$

   Solução:

   fazendo $u = senx\ du = cos(x)dx$

$$\int\frac{\cos x}{sen^2x-senx}dx = \int\frac{du}{u^2-u} = \int\frac{du}{u(u-1)}$$

$$\frac{1}{u(u-1)} = \frac{A}{u}+\frac{B}{u-1}$$

$$Au - A + Bu = 1$$

   fazendo $u=0$, $A=-1$ e comparando os termos de u temos que $B=-A$ logo $B=1$

$$\int\frac{du}{u(u-1)} = -\int\frac{du}{u}+\int\frac{du}{u-1} = -ln(u)+ln(u-1)+C =$$

$$= -ln(sen(x))+ln(sen(x)-1)+C.$$

   (a) (1,0) $\displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx$

   Solução:

   Fazendo $x = 3sen(\theta)$ e $dx = 3cos(\theta)d\theta$

$$\int\frac{x^2}{\sqrt{9-x^2}}dx = \int\frac{9sen^2(\theta)3cos(\theta)d\theta}{\sqrt{9-9sen^2(\theta)}} =$$

$$= \int \frac{9sen^2(\theta)3cos(\theta)d\theta}{3cos(\theta)} = \int 9sen^2(\theta)d\theta$$

Fazendo $sen^2(\theta) = \frac{1}{2} - \frac{cos(2\theta)}{2}$

$$= 9\int sen^2(\theta)d\theta = 9\int \left[\frac{1}{2} - \frac{cos(2\theta)}{2}\right]d\theta$$

$$= 9\int \left[\frac{1}{2} - \frac{cos(2\theta)}{2}\right]d\theta = 9\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen(2\theta)}{4}\right]$$

temos que $sen(2\theta) = 2sen(\theta)cos(\theta)$ logo:

$$= 9\left[\frac{\theta}{2} - \frac{2sen(\theta)cos(\theta)}{4}\right] = 9\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{2}\right]$$

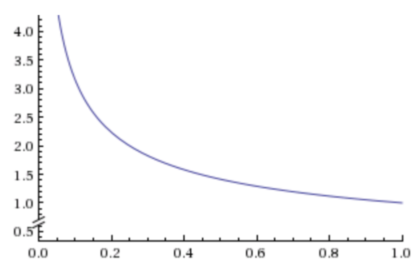
$sen(\theta) = \frac{x}{3}$, $\theta = arcsen\left(\frac{x}{3}\right)$ $cos(\theta) = \frac{\sqrt{9-x^2}}{3}$:

$$= 9\left[\frac{\theta}{2} - \frac{sen(\theta)cos(\theta)}{2}\right] = 9\left[\frac{arcsen\left(\frac{x}{3}\right)}{2} - \frac{x}{2}\frac{\sqrt{9-x^2}}{9}\right] = \frac{1}{2}\left[9arcsen\left(\frac{x}{3}\right) - x\sqrt{9-x^2}\right].$$

5. (3,0 pontos) Seja $\mathscr{R}$ a região limitada pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{x^p}$ para $0 < x \leq 1$ e o eixo x.

a) (0,5) Se $p = \frac{1}{2}$ faça um esboço da região $\mathscr{R}$:

Solução:



b) (1,0) Se $p = \frac{1}{2}$ atribua, se possível, um valor para a área da região $\mathscr{R}$;

Solução:

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \lim_{t\to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+}\left(2 - 2\sqrt{t}\right) = 2.$$

(1,5) Para quais valores de p a área da região $\mathscr{R}$ é finita? Justifique sua resposta.

Solução:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p}dx = \lim_{t\to 0^+}\int_t^1 \frac{1}{x^p}dx$$

Se $-\infty < p < 1$ temos:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Bigg|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-p}\left(1 - t^{1-p}\right) = \frac{1}{1-p}.$$

Se $p = 1$ temos:

$$\int_0^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x} dx = \lim_{t\to 0^+} \ln(x)\Bigg|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \ln(1) - \ln(t) = +\infty.$$

Se $p > 1$ temos:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x^p} dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-p} x^{1-p}\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{1-p}\left(1 - t^{1-p}\right) = +\infty.$$

$\boxed{\text{Logo para } -\infty < p < 1 \text{ a área da região } \mathscr{R} \text{ é finita.}}$