Instituto de Matemática
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Segunda Prova de Cálculo I - Unificado
13/11/2018

1ª Questão: (3.5 pts) Responda às perguntas abaixo no espaço adequado no seu caderno de respostas. As soluções devem ser sucintas e a resposta final deve estar destacada do restante da solução.

I) Seja f uma função derivável no seu domínio e tal que $f(1) = 2$ e $f'(1) = 3$. Determine um valor aproximado para $f(x)$, sendo $x = 0{,}9$, usando a aproximação linear da função f em $a = 1$.

II) Se $f(1) = 12$, f' é contínua e $\displaystyle\int_1^4 f'(x)\, dx = 17$, quanto vale $f(4)$?

III) Seja $\mathcal{R}$ a região do plano xy limitada pela parábola $y = x^2$ e pelo gráfico de $y = \sqrt{x}$. Escreva (mas não calcule!) a integral que representa o volume do sólido obtido rotacionando-se $\mathcal{R}$ ao redor do eixo x.

IV) Seja $f(x) = \displaystyle\int_1^{3x^2} \frac{\operatorname{sen}(t)}{t}\, dt$. Quanto vale $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{x}$?

V) A integral $\displaystyle\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a} a^2 - x^2\, dx$ representa o volume de um sólido de revolução. Descreva o sólido.

Resolução:

I) $f(x) \approx f(1) + f'(1)(x-1) = 2 + 3(0{,}9 - 1) = 2 - 0{,}3 = 1{,}7.$

II) $\displaystyle\int_1^4 f'(x)\, dx = f(4) - f(1) = f(4) - 12 = 17 \Rightarrow f(4) = 29.$

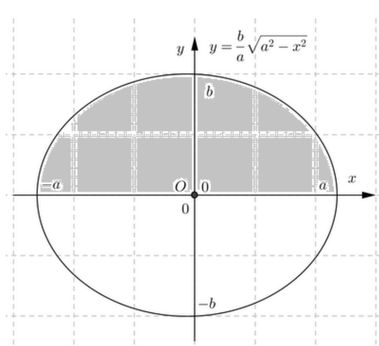
III) $V = \displaystyle\int_0^1 \pi(\sqrt{x})^2\, dx - \int_0^1 \pi(x^2)^2\, dx = \pi\int_0^1 x - x^4\, dx.$

IV) $f'(x) = 6x\dfrac{\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \Rightarrow \displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{6x.\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2.x} = \lim_{x\to 0}\frac{6\operatorname{sen}(3x^2)}{3x^2} \overset{y=3x^2}{=} \lim_{y\to 0}\frac{6\operatorname{sen}(y)}{y} = 6.$

V)

Solução:

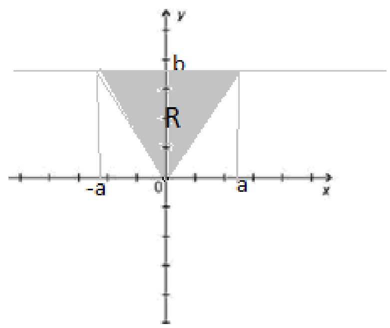
$\displaystyle\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2 - x^2)\, dx = \int_{-a}^{a}\pi f(x)^2\, dx$, com $y = f(x) = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Elevando ao quadrado e reorganizando, temos que $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.O sólido é gerado pela rotação em torno do eixo x da parte superior de uma elipse de semi-eixos a e b. Este sólido é chamado *elipsóide*.



Outra Solução:

$$\frac{\pi b^2}{a^2}\int_{-a}^{a}(a^2-x^2)\ dx = \int_{-a}^{a}\left(\pi b^2 - \pi(\frac{b}{a}x)^2\right)\ dx$$

Sólido gerado pela rotação da região limitada pelas curvas $y = b$, $y = \frac{b}{a}x$ e $y = -\frac{b}{a}x$ em torno do eixo x.



Obs: Podemos supor $a > 0$ e $b > 0$. Caso contrário, tomamos $|a|$ e $|b|$.

2ª Questão: (2.5 pts) Um comerciante deseja produzir uma ampulheta para venda em sua loja. A ampulheta será composta de dois cones idênticos, unidos pelo vértice. O comerciante planeja construir a ampulheta de vidro e em seguida fechar as bases com uma tampa de metal. Ele também planeja que a área superficial da ampulheta, excetuando-se as tampas de metal, seja de A cm^2. Qual deve ser o raio da tampa para que a ampulheta possa marcar o maior intervalo de tempo possível?
Dica: A área lateral de um cone de raio r e altura h é dada por $\pi r\sqrt{r^2+h^2}$.

Resolução: A ampulheta marcará o maior intervalo de tempo possível se seu volume for máximo. Sendo os dois cones que formam a ampulheta idênticos, podemos trabalhar somente com um deles. O volume de um cone de raio de base r e altura h é dado por $\pi r^2 h/3$. A fim de reduzir o problema para uma única variável, notemos que a área lateral de um dos cones é fixa e igual a $A/2$, de modo que

$$\frac{A}{2} = \pi r\sqrt{r^2+h^2} \Rightarrow \frac{A^2}{4} = \pi^2 r^2(r^2+h^2) \Rightarrow h = \frac{\sqrt{A^2-4\pi^2r^4}}{2\pi r}.$$

Portanto o volume do cone é dado por

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{3}\pi r^2\frac{\sqrt{A^2-4\pi^2r^4}}{2\pi r} = \frac{r\sqrt{A^2-4\pi^2r^4}}{6},$$

para $r \in [0, \sqrt{A/2\pi}]$. O limite superior do intervalo é encontrado fazendo-se $h = 0$ na restrição $A/2 = \pi r\sqrt{r^2+h^2}$ e encontrando-se o valor de r correspondente. Logo,

$$V'(r) = \frac{A^2-12\pi^2r^4}{6\sqrt{A^2-4\pi^2r^4}},$$

e como o denominador é sempre positivo no domínio da função, temos que $V'(r) = 0$ se $A^2 - 12\pi^2r^4 = 0$, que implica em $r = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt[4]{12}\sqrt{\pi}}$ cm.

Finalmente, notemos que este é o ponto de máximo global de V, pois tal função é não negativa em seu domínio, o valor encontrado é o único ponto crítico, $V(0) = 0$ e $V(\sqrt{A/2\pi}) = 0$.

3ª Questão: (2.0 pts) Calcule as integrais abaixo:

a) $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx$

b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+x-6}\, dx$

Solução:

a) Calculemos primeiro a integral indefinida. Fazendo $y = \sqrt{x}$, obtemos $dx = 2\sqrt{x}\, dy = 2y\, dy$. Portanto,

$$\int e^{-\sqrt{x}}\, dx = 2\int ye^{-y}\, dy.$$

Integrando por partes, denote $u = y$ e $dv = e^{-y}\, dy$. Assim, $du = 1$ e $v = -e^{-y}$, de modo que

$$\begin{aligned}\int ye^{-y}\, dy &= uv - \int v\, du \\ &= -ye^{-y} + \int e^{-y}\, dy \\ &= -ye^{-y} - e^{-y} + C.\end{aligned}$$

Voltado à variável original x, temos que

$$\int e^{-\sqrt{x}}\, dx = -2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + C.$$

A integral imprópria é então dada por

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}}\, dx &= \lim_{t\to\infty}\int_0^t e^{-\sqrt{x}}\, dx \\ &= \lim_{t\to\infty}[-2e^{-\sqrt{x}}(\sqrt{x}+1) + C]_{x=0}^{x=t} \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-2\frac{\sqrt{t}+1}{e^{\sqrt{t}}} + C\right] - [-2 + C] \\ &\overset{L'H}{=} \lim_{t\to\infty}\left[-2\frac{1/2\sqrt{t}}{e^{\sqrt{t}}/2\sqrt{t}}\right] + 2 \\ &= \lim_{t\to\infty}\left[-2\frac{1}{e^{\sqrt{t}}}\right] + 2 \\ &= 2.\end{aligned}$$

b) Notemos que as raízes do denominador são -2 e 3, de modo que podemos escrever $\dfrac{1}{x^2+x-6} = \dfrac{1}{(x-2)(x+3)}$. Para a decomposição em frações parciais, queremos A e B tais que

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3)+B(x-2)}{(x-2)(x+3)}$$
$$\Rightarrow 1 = A(x+3) + B(x-2).$$

Fazendo $x = 2$ na relação acima, temos que $A = 1/5$, e fazendo $x = -3$, temos que $B = -1/5$, de modo que

$$\frac{1}{(x-2)(x+3)} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\right),$$

e portanto,

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2+x-6}\, dx &= \frac{1}{5}\int \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+3}\, dx \\ &= \frac{1}{5}(\ln|x-2| - \ln|x+3|) + C.\end{aligned}$$

4ª Questão: (2.0 pts) Seja $\mathcal{R}$ a região compreendida entre os gráficos das funções $f(x) = x^2/3 - 1$, $g(x) = -x^2 + 3$ e $h(x) = 3x - 7$. Faça o que se pede abaixo:

a) Esboce a região $\mathcal{R}$, explicitando quais são os pontos de interseção entre as curvas.

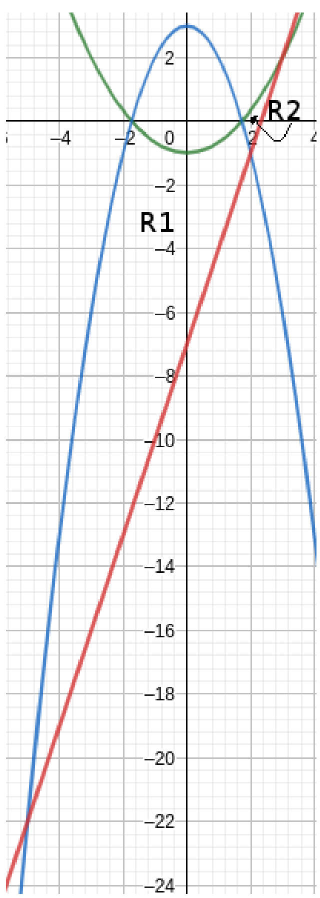
b) Escreva (mas não calcule!) integrais que representem a área de $\mathcal{R}$.

Solução:

a) As curvas verde, azul e laranja são, respectivamente, as funções f, g e h, e os pontos de interseção entre as curvas, duas-a-duas, são:

- $f(x) = g(x) \Rightarrow x^2/3 - 1 = -x^2 + 3 \Rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \pm\sqrt{3}$.
- $g(x) = h(x) \Rightarrow -x^2 + 3 = 3x - 7 \Rightarrow x^2 + 3x - 10 = 0 \Rightarrow x = -5$ e $x = 2$.
- $f(x) = h(x) \Rightarrow x^2/3 - 1 = 3x - 7 \Rightarrow x^2 - 9x + 18 = 0 \Rightarrow x = 3$ e $x = 6$, porém consideramos somente $x = 3$ para termos de fato a região limitada pelas três curvas.

Dessa forma, a região $\mathcal{R}$ é a união das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ mostradas abaixo.



b) Área($\mathcal{R}$)= $\displaystyle\int_{-5}^{-\sqrt{3}} g(x) - h(x)\, dx + \int_{-\sqrt{3}}^{3} f(x) - h(x)\, dx = \int_{-5}^{-\sqrt{3}} -x^2 - 3x + 10\, dx + \int_{-\sqrt{3}}^{3} \frac{x^2}{3} - 3x + 6\, dx$

OBSERVAÇÃO: Há outras maneiras de expressar a área da região $\mathcal{R}$. Aceitaremos também como corretas soluções que expressem somente a área de $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$.