Universidade Federal do Rio de Janeiro
INSTITUTO DE MATEMÁTICA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Gabarito da Primeira Prova Unificada de Cálculo 1 - 2014/2

Engenharia e Engenharia Química

30/09/2014

<u>**1ª Questão:**</u> (3.0 pts)

(1) Calcule os seguinte limites.

$$(a) \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen} x}{x + \operatorname{sen} x}, \quad (b) \quad \lim_{x\to 0} \big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big)\big(\operatorname{cossec}(x)\big).$$

(2) Considere a função

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt[4]{x^2-1}}.$$

Determine o domínio de f, suas assíntotas e seus pontos críticos, caracterizando-os (isto é, se são pontos de máximo, de mínimo, locais, globais, etc.)

Solução: (a) Observe que

$$\frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(x)} = \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}, \quad \forall x \neq 0. \tag{1.1}$$

Observe também que $-1 \leq \operatorname{sen}(x) \leq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo,

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \leq \frac{1}{x}, \quad \forall x > 0.$$

Segue do Teorema do Confronto que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 0.$$

Assim, temos de (1):

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x + \operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1 + \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}} = 1.$$

(b) Como $\operatorname{cossec}(x) = 1/\operatorname{sen}(x)$ e

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{arc\,sen}(x) = \lim_{x\to 0} \operatorname{sen}(x) = 0,$$

podemos aplicar a Regra de L'Hospital para concluir que

$$\lim_{x\to 0} \big(\operatorname{arc\,sen}(x)\big)\big(\operatorname{cossec}(x)\big) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arc\,sen}(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos(x)\sqrt{1-x^2}} = 1.$$

(c) $f(x) \in \mathbb{R}$ se, e somente se, $x^2 - 1 > 0$, isto é, $|x| > 1$. Logo, o domínio de f é o conjunto

$$D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty).$$

Como

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} = +\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -1^-} \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} = -\infty, \tag{1.2}$$

as retas $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais de f. Além disso, como

$$\frac{x}{\sqrt[4]{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{|x|}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/4}}.$$

e

$$\frac{x}{\sqrt{|x|}} = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{se } x > 0, \\ -\sqrt{-x} & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

temos

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/4}} = +\infty, \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{-\sqrt{-x}}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{1/4}} = -\infty, \end{aligned} \tag{1.3}$$

de onde se conclui que f não possui assíntotas horizontais.
Como f é diferenciável em todos os pontos do seu domínio, seus pontos críticos são os que anulam a derivada. Então, pela regra do quociente, obtemos:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 2}{2(x^2 - 1)^{5/4}}.$$

Portanto,

$$f'(x) = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{2}.$$

É claro que esses dois pontos críticos não podem ser máximos ou mínimos absolutos em vista de (1.2) e (1.3). Mas,

$$f'(x) > 0 \iff x^2 - 2 > 0 \iff |x| > \sqrt{2}.$$

Logo f é crescente nos intervalos $(\sqrt{2}, +\infty)$ e $(-\infty, -\sqrt{2})$ e decrescente nos intevalos $(-\sqrt{2}, -1)$ e $(1, \sqrt{2})$. Portanto, $-\sqrt{2}$ é ponto de máximo local e $\sqrt{2}$ é ponto de mínimo local.

2ª Questão: (2.0 pts)

Duas formigas andam na parede, atrás do fogão. No instante $t = 0$, a formiga A se encontra a 20 centímetros à esquerda da formiga B. Se a formiga A anda para a direita com velocidade constante de 2cm/s e se a formiga B anda para cima com velocidade constante de 2,25cm/s, com que taxa está variando a distância entre essas formigas no instante $t = 4s$?

Solução: Sejam $x(t)$ e $y(t)$ as posições no instante t das formigas A e B, respectivamente, (relativamente à posição inicial da formiga B). Como elas se deslocam com velocidade constante, temos

$$x(4) = 12\text{cm}, \quad y(4) = 9\text{cm}, \quad x'(4) = -2\text{cm/s}, \quad y'(4) = 2,25\text{cm/s}.$$

Se $L(t)$ é a distância entre as formigas no instante t, segue do Teorema de Pitágoras (veja figura abaixo),

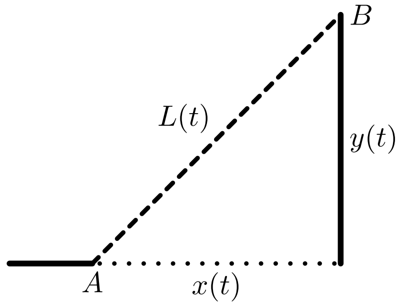
$$L^2(t) = x^2(t) + y^2(t), \quad \forall t. \tag{2.1}$$

Em particular, no instante $t = 4$, temos $L(4) = \sqrt{225} = 15$.
Derivando a expressão (2.1) acima em relação a t, obtemos

$$L\frac{dL}{dt} = x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}.$$

Logo, no instante $t = 4$, obtemos

$$15\frac{dL}{dt} = 12 \times (-2) + 9 \times 2,25 \quad \Rightarrow \qquad \frac{dL}{dt} = -0,25\,\text{cm/s}.$$



<u>**3ª Questão:**</u> (3.0 pts) *Uma lata fechada com volume de 512cm^3 tem a forma de um cilindro circular reto. A tampa e a base, ambas circulares, são cortadas de pedaços quadrados de alumínio. Sabendo-se que o preço do alumínio é de P Reais por centímetro quadrado, determine o raio e a altura da lata para que o custo de fabricação de cada lata seja mínimo. Inclua no custo da lata o material desperdiçado na fabricação da tampa e do fundo.*

Solução: O volume do cilindro circular reto é $V = \pi r^2 h$, onde r é o raio da base e h sua altura. Assim,

$$\pi r^2 h = 512 \quad \Rightarrow \quad h = \frac{512}{\pi r^2}.$$

Como o material que compõe a lateral do cilindro tem área igual a $2\pi r h$ e os dois quadrados dos quais serão recortados a tampa e o fundo da lata têm áreal igual $8r^2$, a áreal total utilizada é dada pela função

$$A(r) = 8r^2 + \frac{1024}{r}, \quad r > 0.$$

Observe que

$$\lim_{r\to 0^+} A(r) = \lim_{r\to +\infty} A(r) = +\infty.$$

Como $A(r)$ é uma função derivável (e portanto, contínua) em $(0, +\infty)$, ela atinge seu mínimo absoluto nesse intervalo. Vamos calculá-lo.

$$A'(r) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 16r - \frac{1024}{r^2} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad r^3 = \frac{1024}{16} = 64.$$

Logo, o único ponto crítico de $A(r)$ é $r = \sqrt[3]{64} = 4$. Além disso,

$$A'(r) > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad r > 4,$$

de modo que A é crescente no intervalo $(4, +\infty)$ e decrescente em $(0, 4)$. Portanto, $r = 4$ é o ponto de mínimo absoluto de $A(r)$. Assim, as dimensões da lata de menor área (e consequentemente menor custo) são:

$$r = 4\,\text{cm} \quad \text{e} \quad h = \frac{32}{\pi}\,\text{cm}.$$

4ª Questão: (3.0 pts)

Considere as funções $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = 2x^3 - 4x^2 + 6x \quad \text{e} \quad g(x) = 5x^2 - 6x + 1.$$

(a) *Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ possui ao menos uma raiz no intervalo $[0, 3]$;*
(b) *Mostre que e equação $f(x) = g(x)$ possui somente uma raiz no intervalo $[0, 3]$;*
(c) *Mostre que a equação $f(x) = g(x)$ não possui raízes fora do intervalo $[0, 3]$.*

Solução: (a) Seja $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 1$. Então:

$$h(3) = 8, \quad h(0) = -1.$$

Pelo Teroema do Valor Intermediário, existe pelo menos um ponto $x_0 \in (0, 3)$ tal que $h(x_0) = 0$.
(b) e (c) Suponhamos que haja uma outra raiz $x_1 \neq x_0$ da equação $h(x) = 0$ no intervalo $(0, 3)$. Então, segue do Teorema de Role que $h'(x_3) = 0$ para algum x_3 entre x_0 e x_1. Mas observe que

$$h'(x) < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 6x^2 - 18x + 12 < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 1 < x < 2.$$

Assim, vemos que h é crescente nos intevalos $(-\infty, 1)$ e $(2, +\infty)$ e decrescente no intervalo $(1, 2)$ e, portanto, $x = 1$ é máximo local e $x = 2$ é mínimo local.
Como $h(1) = 4$ e f é crescente no intervalo $(-\infty, 1)$, constatamos pelo Teorema do Valor Intermediário que existe uma única raiz da equação no intervalo $(-\infty, 1)$. Além disso, como $3 = f(2) \leq f(x)$ para todo $x \in [1, +\infty)$, não pode haver uma segunda raiz x_1 no intevalo $[1, +\infty)$. Portanto, existe uma única raiz x_0 da equação $f(x) = g(x)$ em $\mathbb{R}$.