Univerdidade Federal de Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Gabarito da 2^a Prova Unificada de Cálculo I- 2015/2, 23/02/2016

1. (2,0) Um cilindro circular reto é inscrito em uma esfera de raio r. Encontre a maior área de superfície possível para esse cilindro.

   Solução: Como o cilindro reto esta inscrito (ver figura 1)

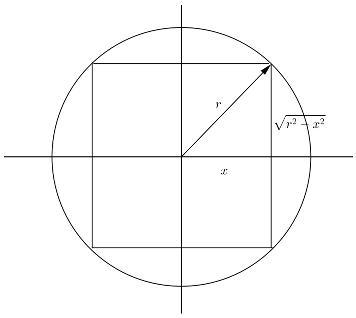

Figura 1: Cilindro Inscrito

então a altura h do cilindro em função de x é $h(x) = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, também com o raio do cilindro é x, então a área lateral é

$$A(x) = 2\pi x \cdot h(x) = 4\pi x\sqrt{r^2 - x^2} \quad \text{para} \quad x \in [0, r].$$

Temos que maximizar a função $A(x)$, para isso calculemos os pontos de extremos. De fato:

$$\begin{aligned} A'(x) &= 4\pi \left(\sqrt{r^2 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) = 4\pi \left(\frac{r^2 - x^2 - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) \\ &= 4\pi \left(\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} \right) = \frac{4\pi(r - \sqrt{2}x)(r + \sqrt{2}x)}{\sqrt{r^2 - x^2}}. \end{aligned}$$

Como $A(x)$ é contínua para $x \in [0, r]$, então $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot r = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot r$ é o único ponto crítico de f.
Além disso, pela equação de $A'(x)$ vemos que

$$A'(x) > 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq x < \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r$$

e

$$A'(x) < 0 \quad \text{para} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot r < x \leq r.$$

Logo pelo critério da primeira derivada podemos concluir que o ponto $x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot r$ é um ponto de máximo global de $A(x)$, e a maior área de superfície possível é então dada por

$$A\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r\right) = 4\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r\sqrt{r^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r\right)^2} = 4\pi\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot r = 2\pi r^2.$$

---

2. (2,0) Considere a função f dada por $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

   a. Encontre, caso existam, as assíntotas verticais e horizontais ao gráfico de f.

   Solução: O domínio da f é $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Além disso,

   $$\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

   Por tanto a reta $x = 1$ é a única assíntota vertical e não tem assíntota horizontal.

   ---

   b. Determine os pontos críticos de f, intervalos onde a função é crescente e onde a função é decrescente.

   Solução:
   $$f'(x) = \frac{2x(x-1) - x^2}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \tag{1}$$
   Logo, $x = 0$ e $x = 2$ são os únicos pontos críticos de f. Também podemos ver que, como $(x-1)^2 > 0$ para todo $x \neq 1$, então

   $$f'(x) > 0 \quad \text{em} \quad (-\infty, 0) \cup (2, +\infty) \quad \text{e por tanto crescente}$$

   e

   $$f'(x) < 0 \quad \text{em} \quad (0, 2) \quad \text{e por tanto decrescente.}$$

   ---

   c. Encontre os extremos relativos e absolutos de f, caso existam.

   Solução: Pelo item a) $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$, logo f não tem extremos absolutos.
   Agora, pelo item b) e o critério da primeira derivada vemos que $x = 0$ é máximo local e $x = 2$ é mínimo local.

   ---

d. Determine os intervalos onde o gráfico da função possui concavidade voltada para cima e concavidade voltada para baixo.

Solução: Pela equação (1),

$$
\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{(2x-2)(x-1)^2 - 2(x^2-2x)(x-1)}{(x-1)^4} = \frac{2(x-1)((x-1)^2 - (x^2-2x))}{(x-1)^4} \\
&= \frac{2(x^2-2x+1-x^2+2x)}{(x-1)^3} = \frac{2}{(x-1)^3}. \quad \text{Então temos}
\end{aligned}
$$

$$f''(x) > 0 \;\; \text{em} \;\; (1, +\infty) \;\; \text{e por tanto côncava para cima}$$

e

$$f''(x) < 0 \;\; \text{em} \;\; (-\infty, 1) \;\; \text{e por tanto côncava para baixo.}$$

---

e. Esboce o gráfico da função f.

Solução:

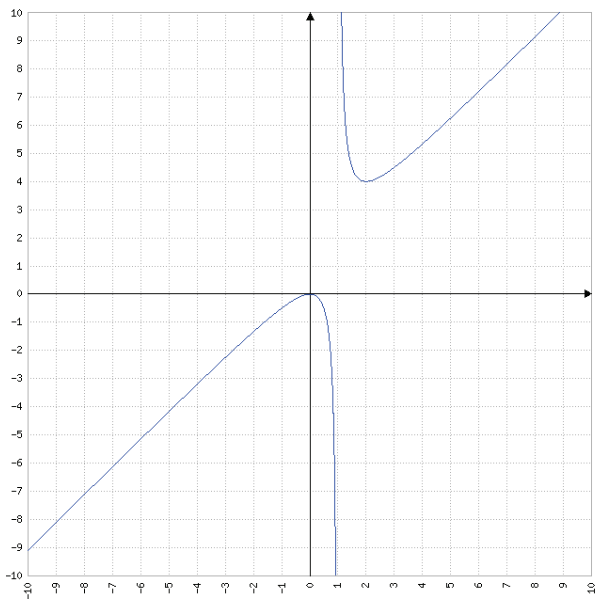

Figura 2: Gráfico de f

3. Calcule as seguintes integrais:

a (1,0) $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^2+x}{x^3+\frac{3}{2}x^2+1}\,dx$

Solução: Fazendo $u = x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ temos que $\boxed{\dfrac{du}{dx} = 3(x^2+x)}$ assim

$$\int_0^1 \frac{x^2+x}{x^3+\frac{3}{2}x^2+1}\,dx \;=\; \frac{1}{3}\int_1^{\frac{7}{2}} \frac{du}{u} = \frac{1}{3}\ln u \,|_1^{\frac{7}{2}} = \frac{1}{3}\left(\ln\frac{7}{2} - \ln 1\right) = \frac{1}{3}\ln\frac{7}{2}.$$

b. (1,0) $\displaystyle\int \sqrt{1+e^{2x}}\,dx.$

Solução: Fazendo $u = \sqrt{1+e^{2x}}$ e usando os método de integração: substituição e frações parciais, temos

$$\begin{aligned}
\int \sqrt{1+e^{2x}}\,dx &= \int \frac{u^2}{u^2-1}\,du = \int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du \\
&= u + \frac{1}{2}\int\frac{1}{u-1}\,du - \frac{1}{2}\int\frac{1}{u+1}\,du \\
&= u + \frac{1}{2}\ln\frac{u-1}{u+1} + c = \sqrt{1+e^{2x}} + \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{1+e^{2x}}-1}{\sqrt{1+e^{2x}}+1} + c.
\end{aligned}$$

---

4. (2,0) Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sqrt{sec^2(t)-2}\,dt$. Calcule o comprimento de arco do gráfico da função $F(x)$ para $x \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$.

Solução: Pelo T.F.C., $F'(x) = \sqrt{sec^2(x)-2}$. O comprimento de arco desejado é dado por:

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+[F'(x)]^2}dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+[\sqrt{sec^2(x)-2}]^2}\,dx \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{1+sec^2(x)-2}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{sec^2(x)-1}\,dx.
\end{aligned}$$

Usando que $\boxed{tan^2\ x = sec^2\ x - 1}$

$$\begin{aligned}
L &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sqrt{tan^2(x)}\,dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} tan(x)dx = \ln\ \sec\ x\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\ sec\frac{\pi}{3} - \ln\ \sec\frac{\pi}{4} \\
&= \ln\ 2 - \ln\ \sqrt{2} = \ln\frac{2}{\sqrt{2}} = \ln\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

---

5. (2,0) Seja $f(x) = xe^{-2x}$ definida em $[0, +\infty)$ e R a região delimitada pelo gráfico da função f e o eixo x. Calcule o volume do sólido gerado ao se rotacionar a região R ao redor do eixo y.

Solução: Usando o método de cascas cilíndricas para calcular o volume, temos que o volume a ser calculado é:

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi \int_0^{+\infty} x^2 e^{-2x}\,dx \overbrace{=}^{\text{Int. imp.}} 2\pi \cdot \lim_{a\to\infty} \int_0^a \underbrace{x^2}_{u} \underbrace{e^{-2x}\,dx}_{dv} \quad \boxed{\tfrac{du}{dx} = 2x \text{ e } v = -\tfrac{1}{2}e^{-2x}} \\
&\overbrace{=}^{\text{Int por partes}} 2\pi \cdot \lim_{a\to\infty} \left[-\frac{1}{2}x^2 e^{-2x} \Big|_0^a + \int_0^a \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{-2x}\,dx}_{dv} \right] \\
&\overbrace{=}^{\text{Int por partes}} 2\pi \cdot \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}a^2 e^{-2a} - \frac{1}{2}ae^{-2a} + \frac{1}{2}\int_0^a e^{-2x}\,dx \right] \\
&= 2\pi \cdot \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}a^2 e^{-2a} - \frac{1}{2}ae^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2x} \Big|_0^a \right] \\
&= 2\pi \cdot \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}a^2 e^{-2a} - \frac{1}{2}ae^{-2a} - \frac{1}{4}e^{-2a} + \frac{1}{4} \right] = 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

Pois $\lim\limits_{a\to+\infty} e^{-2a} = 0$ e por L'Hôspital $\lim\limits_{a\to+\infty} a^2 e^{-2a} = \lim\limits_{a\to+\infty} ae^{-2a} = 0$.
