Univerdidade Federal de Rio de Janeiro
Instituto de Matemática
Departamento de Matemática

Gabarito da 1^a Prova Unificada de Cálculo I- 2015/2, 10/12/2015

1. (1,5) Considere $f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} \ln(ax^2), & se\ x \geq 1, \\ \dfrac{sen(x^3-1)}{x^2-1}, & se\ 0 < x < 1. \end{cases}$

   Encontre o valor de a para que f seja contínua.

Solução
Verificamos que f é contínua no intervalo $(0,1)$ porque é o quociente de duas funções contínuas e é contínua no intervalo $(1,\infty)$ pois é a composição de duas funções contínuas, logaritmo e polinômio.
Para que f seja contínua no ponto $x=1$ devemos ter os limites laterais iguais quando $x \to 1$. Assim, $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{sen(x^3-1)}{x^2-1}$ é uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ e podemos usar L'Hôspital e $\displaystyle\lim_{x\to 1-} \frac{sen(x^3-1)}{x^2-1} = \lim_{x\to 1-} \frac{3x^2cos(x^3-1)}{2x} = \frac{3\cos 0}{2} = \frac{3}{2}$ e $\displaystyle\lim_{x\to 1+} \ln(ax^2) = ln(a)$, pois $\ln(ax^2)$é continua em $[1,+\infty)$.
Devemos ter $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{3}{2}$ para que f seja contínua. Sendo assim, $\ln(a) = \frac{3}{2}$, donde $a = e^{\frac{3}{2}}$.

2. (1,5) Encontre a equação da reta tangente ao gráfico de equação dada por

$$x^2y^3 = 2y + x \ \text{ no ponto } \ (-1,1).$$

Solução
Derivando implicitamente com relação a x a equação $x^2y^3 = 2y+x$, temos $2xy^3 + 3x^2y^2y' = 2y' + 1$, assim deixando y' em evidencia, vemos que $y' = \dfrac{1-2xy^3}{3x^2y^2-2}$.
Para calcular a inclinação da reta tangente no ponto $(-1,1)$ simplesmente calculamos y' nesse ponto, e temos $y' = \frac{1-2(-1)1^3}{3(-1^2)1^2-2} = 3$. Então a equação da reta tangente fica: $y-1 = 3(x-(-1))$, ou seja $y = 3x+4$.

3. Resolva

   a. (1,0) $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{|x^2-2x-3|}$;

Solução
$\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{|x^2-2x-3|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{|(x+1)(x-3)|} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{|x+1||x-3|} =$
$\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{x+1}{|x+1|} \cdot \lim_{x\to -1^+} \frac{1}{|x-3|}$. Como o único ponto onde a função $\frac{1}{|x-3|}$ não é contínua é $x=3$, então $\displaystyle\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{|x-3|} = \frac{1}{4}$. Para calcular o outro limite,

observemos que para $x > -1$ $|x+1| = x+1$, assim $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{|x+1|} = \lim_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{x+1}$ $= \lim_{x\to -1^+} 1 = 1$. Em resume, $\lim_{x\to -1^+} \dfrac{x+1}{|x^2-2x-3|} = 1 \cdot \dfrac{1}{4}$.

b. (1,0) $\lim_{x\to 2} (x^2-3)^{cossec(2x-4)}$.

Solução
$\lim_{x\to 2}(x^2-3)^{cossec(2x-4)}$ é uma indeterminação da forma 1^∞, portanto faremos
$\lim_{x\to 2}(x^2-3)^{cossec(2x-4)} = \lim_{x\to 2} e^{ln((x^2-3)^{cossec(2x-4)})} = e^{\lim_{x\to 2}\ln((x^2-3)^{cossec(2x-4)})}$,
pois a função exponencial é contínua.
Agora basta calcular $\lim_{x\to 2} \ln((x^2-3)^{cossec(2x-4)}$
$\lim_{x\to 2}\ln((x^2-3)^{cossec(2x-4)}) = \lim_{x\to 2} cossec(2x-4)\cdot \ln(x^2-3) = \lim_{x\to 2} \dfrac{\ln(x^2-3)}{sen(2x-4)}$.
O que nos dá uma indeterminação do tipo $\dfrac{0}{0}$, portanto podemos usar a regra de L'Hôspital. $\lim_{x\to 2}\dfrac{[\ln(x^2-3)]'}{[sen(2x-4)]'} = \lim_{x\to 2}\dfrac{\frac{2x}{x^2-3}}{cos(2x-4)\cdot(2)} = \dfrac{\frac{4}{4-3}}{2\cos 0} = 2$.
Assim $\lim_{x\to 2}(x^2-3)^{cossec(2x-4)} = \lim_{x\to 2} e^{\ln((x^2-3)^{cossec(2x-4)})} = e^2$.

c. (1,0) Considere a função $f(x) = sen(arctg(x))$, mostre que $f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$.

Solução
Usando a regra da cadeia e o fato que $\frac{d}{dx}arctg(x) = \frac{1}{1+x^2}$, temos que
$f'(x) = cos(arctg(x))\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Ponha $y = arctg(x)$, então $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ por definição de inversa da função tangente. Assim, $f'(x) = \cos(y)\cdot\frac{1}{1+x^2}$. Por tanto devemos que encontrar $\cos(y)$ em função de x. Para isso, observemos que
$tg(y) = x$, ou seja $\sec^2 y = 1 + tg^2 y = 1 + x^2$, logo $\cos^2 y = \frac{1}{1+x^2}$,
além disso, para $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $\cos(y) \geq 0$ o qual implica que $\cos(y) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.
Concluímos então que $f'(x) = \cos(y)\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\cdot\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

4. (1,5) Verifique que a equação $e^{x^2-x} = x^3 - 4x^2 + x + 2$ possui pelo menos uma solução para algum valor de x positivo.

solução
Seja $f(x) = e^{x^2-x} - (x^3 - 4x^2 + x + 2)$. Achar uma solução para equação é equivalente a resolver $f(x) = 0$.
Verificamos que f é contínua pois é a soma de uma função exponencial composta com um polinômio e outro polinômio. Também verificamos que
$f(0) = e^{0^2-0} - (0^3 - 4\cdot 0^2 + 0 + 2) = 1 - 2 = -1$ e
$f(1) = e^{1^2-1} - (1^3 - 4\cdot 1^2 + 1 + 2) = 1 - (0) = 1$
Como f é contínua e $f(0) < 0 < f(1)$, o teorema do valor intermediário nos dá que existe $x \in (0, 1)$ tal que $f(x) = 0$.
Logo existe um x positivo tal que a equação seja satisfeita.

5. (2.5) Considere a parábola $y = x^2$.

I. Encontre a equação da reta tangente T à parábola no ponto $P(a, a^2)$.

Solução
A inclinação da reta tangente que passa ponto (a, a^2) é $2a$, assim a equação da reta tangente é $y - a^2 = 2a(x - a)$ ou $y = 2ax - a^2$.

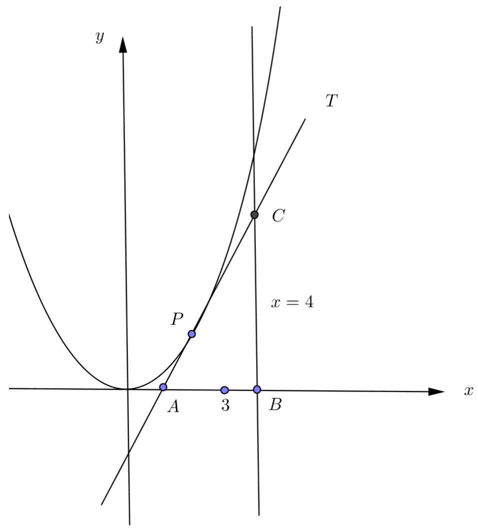

Figura 1: $y = x^2$

II. Expresse a área do triângulo ABC em função de a (ver figura).

Solução
Para achar a área do triângulo ABC, precisamos encontrar os pontos A e C. Estes dois pontos são a interseção da reta tangente no ponto (a, a^2) o eixo x e a reta $x = 4$, respectivamente.
Ou seja, para achar A fazemos $y = 0$ na equação $y = 2ax - a^2$ e temos que $0 = 2ax - a^2$ ou $x = \frac{a}{2}$ e $A = (\frac{a}{2}, 0)$ (note que, se $a = 0$ não temos triângulo formado).
Para o ponto C, fazemos $x = 4$ em $y = 2ax - a^2$, ou seja, $C = (4, 2a(4) - a^2) = (4, 8a - a^2)$.
Isto implica que a área do triângulo ABC é $\mathcal{A} = \dfrac{(4 - \frac{a}{2})(8a - a^2)}{2}$

III. Sabendo que o ponto P parte da origem e que a taxa de variação da abscissa é de $4cm/min$, determine a taxa de variação da área do triângulo ABC, quando o ponto de tangência é $P(3, 9)$.

Solução

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\frac{da}{dt}(8a - a^2) + \left(4 - \frac{a}{2}\right)\left(8\frac{da}{dt} - 2a\frac{da}{dt}\right)\right).$$

Como $\frac{da}{dt} = 4cm/s$ e no ponto $(3, 9)$ $a = 3$ temos que

$$\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\cdot 4(8\cdot 3 - 3^2) + \left(4 - \frac{3}{2}\right)(8\cdot 4 - 2\cdot 3\cdot 4)\right) = \frac{1}{2}\left(-2(24 - 9) + \frac{5}{2}(32 - 24)\right)$$

$$= \frac{1}{2}(-30 + 20) = -5.$$

Em conclusão $\dfrac{d\mathcal{A}}{dt} = -5cm^2/s.$