



Nome completo: _____ DRE: _____

Professor no SIGA/Horário: _____ / _____

I- Questão Objetiva (C)

Questão 1: (3 pontos)

(1.1) A reta $y = -5x + 9$ é tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(1, 4)$ e, além disso, intersepta o mesmo gráfico no ponto $(4, f(4))$. O valor de $f(4)$ é

- (a) -13
- (b) -12
- (c) -11
- (d) -10

A afirmação correta é a apresentada na letra (c) .

(1.2) Seja $f : [0, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(0) < f(5) < 0$, $f(2) > 0$, $f'(2) = 0$ e $f''(x) < 0$ em $(0, 5)$.

- (a) f' é crescente em $(0, 5)$
- (b) f tem pelo menos 2 raízes.
- (c) f tem exatamente duas raízes e seu valor máximo absoluto é $f(2)$.
- (d) f assume seu valor máximo absoluto em dois pontos distintos, sendo esse valor igual a $f(2)$.

A afirmação correta para qualquer função f , como no enunciado, é a apresentada na letra (c) .

(1.3) O valor de $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^4} \int_1^x \tan^3(t-1) \ln(t + \sqrt{e}-1) dt$ é

- (a) $\frac{3}{2}$
- (b) 1
- (c) $\frac{1}{6}$
- (d) $\frac{1}{8}$

A afirmação correta é a apresentada na letra (d) .

(1.4) Seja \mathcal{R} a região finita do plano, delimitada pelas curvas $y = 4x^2$ e $y = 4$. O volume do sólido de revolução obtido ao girar a região \mathcal{R} em torno da reta $x = 2$ é representado pela expressão integral:

- (a) $\pi \int_0^4 (2 - \frac{1}{2}\sqrt{y})^2 dy$.
- (b) $4\pi \int_0^2 \sqrt{y} dy$.
- (c) $\pi \int_0^4 (2 + \frac{1}{2}\sqrt{y})^2 dy$.
- (d) $4\pi \int_0^4 \sqrt{y} dy$.

A afirmação correta é a apresentada na letra (d) .

(1.5) Sejam

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx \quad \text{e} \quad J = \int_{-\infty}^0 e^{x-x^2} dx.$$

Considere as seguintes afirmações:

- (a) I é divergente e J é convergente.
- (b) I e J são convergentes.
- (c) I é convergente e J é divergente.
- (d) I e J são divergentes.

A afirmação correta é a apresentada na letra (a) .

Solução:

(1.1) Resposta: (c).

Substituindo $x = 4$ na reta tem-se $f(3) = -5 \cdot 4 + 9 = -11$

(1.2) Resposta: (c).

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos uma raiz em cada uma dos intervalos $(0, 2)$ e $(2, 5)$. Caso exista uma terceira raiz, O Teorema de Rolle implicaria em dois pontos com derivada nula, o que é impossível uma vez que f' é decrescente em virtude da $f'' < 0$ em $(0, 5)$. Portanto, existem exatamente duas raízes de f em $[0, 5]$. Finalmente, o $x = 2$ é ponto de máximo local em virtude do critério da segunda derivada ($f''(2) < 0$) e como é o único ponto crítico, então $f(2)$ é o valor máximo absoluto de f em $[0, 5]$.

(1.3) Resposta: (d).

$L := \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{(x-1)^4} \int_1^x \tan^3(t-1) \ln(t + \sqrt{e} - 1) dt \rightarrow \frac{0}{0}$ (forma indeterminada). Pela regra de L'Hôpital e o Teorema fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan^3(t-1) \ln(t + \sqrt{e} - 1)}{4(x-1)^3} \\ &= \frac{1}{4} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\tan^3(x-1)}{(x-1)^3} \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(t + \sqrt{e} - 1) \\ &= \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

(1.4) Resposta: (d).

A parábola $y = 4x^2$ se decompõe em duas funções na variável $y \in [0, 4]$, a saber $x = -\frac{1}{2}\sqrt{y}$ e $x = \frac{1}{2}\sqrt{y}$. Aplicando a fórmula dos discos para o cálculo de volume obtemos:

$$V = \pi \int_0^4 \left[\left(2 + \frac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2 - \left(2 - \frac{1}{2}\sqrt{y}\right)^2 \right] dy = 4\pi \int_0^4 \sqrt{y} dy.$$

(1.5) Resposta: (a).

Note que o integrando $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ é contínuo em $(0, 1]$ e é descontínuo em 0 com $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$. Assim, a integral I é imprópria. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x} dx.$$

Fazendo a substituição $u = \ln(x)$, temos que $du = \frac{1}{x} dx$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$ e $x = a \Rightarrow u = \ln(a)$. Daí, obtemos

$$\lim_{a \rightarrow 0^+} \int_{\ln(a)}^0 u du = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{u^2}{2} \Big|_{\ln(a)}^0 = \lim_{a \rightarrow 0^+} \frac{-\ln^2(a)}{2} = -\infty.$$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

A integral J é também imprópria, pois o domínio de integração da função contínua e^{x-x^2} é $(-\infty, 0)$ e converge pelo critério de comparação com a integral $\int_{-\infty}^0 e^x dx < +\infty$.

II- Questões Discursivas

Questão 2: (2 pontos)

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3 - 16}{(x^2 + 1)(x - a)} & \text{se } x \neq a, \\ b & \text{se } x = a. \end{cases}$$

- Determine para quais valores de a a função f possui, pelo menos, um assíntota vertical.
- Determine as assíntotas horizontais de f , caso existam.
- Determine quais valores de a e b , tornam a função f é contínua em todo \mathbb{R} .

Solução:

(a) Escrevemos $\frac{2x^3 - 16}{(x^2 + 1)(x - a)} = \frac{2(x^3 - 8)}{(x^2 + 1)(x - a)} = 2 \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{(x^2 + 1)(x - a)}$, $x \neq a$. Esta função racional possui uma única raiz real no numerador ($x = 2$) e uma única raiz real no denominador ($x = a$). Portanto, para qualquer $a \neq 2$ teremos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f , uma vez que o numerador e denominador, respectivamente, verificam:

$$\lim_{x \rightarrow a} (x - 2)(x^2 + 2x + 4) = (a - 2)(a^2 + 2a + 4) \neq 0$$

e

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + 1)(x - a) = 0.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^3 - 16}{(x^2 + 1)(x - a)} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2 - 16/x^3}{(1 + 1/x^2)(1 - a/x)} = \frac{2 - 0}{(1 + 0)(1 - 0)} = 2,$$

logo a reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f .

(c) Para todo $x \neq a$, f é racional e bem definida, logo é contínua. Para verificar a continuidade de f no ponto a a reta $x = a$ não pode ser uma assíntota vertical; portanto, em virtude do item (a), temos que $a = 2$. Além disso,

$$b = f(2) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+1)(x-2)} = 2 \frac{4+4+4}{4+1} = \frac{24}{5}.$$

Questão 3: (2 pontos)

Considere a curva no plano cartesiano que satisfaz $x^2 - 5xe^y + 3e^{2y} + 1 = 0$. Sabendo que y está definida implicitamente como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 0)$, determine o valor de $y'(1)$

Solução:

Derivando implicitamente y com respeito a x temos

$$2x - [5e^{y(x)} + 5xe^{y(x)}y'(x)] + 3e^{2y(x)}2y'(x) = 0.$$

Pondo $x = 1$ e $y(1) = 0$ obtemos

$$2 - [5 + 5y'(1)] + 6y'(1) = -3 + y'(1) = 0;$$

assim $y'(1) = 3$.

Questão 4: (2 pontos)

Considere uma reta vertical (paralela ao eixo OY) que intercepta os gráficos

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} \quad \text{e} \quad y = -3x$$

nos pontos P e Q , respectivamente. Sabendo que o comprimento L do segmento \overline{PQ} é o menor possível, determine o valor de L .

Solução:

O comprimento do segmento \overline{PQ} é dado pela expressão

$$\ell(x) = \left| \frac{x^2 + 1}{x} + 3x \right| = \left| \frac{4x^2 + 1}{x} \right|, \quad x \neq 0$$

Notemos que $\ell(x) = \ell(-x)$, logo é suficiente encontrar o valor mínimo absoluto de ℓ no domínio $x > 0$, onde

$$\ell(x) = \left| \frac{4x^2 + 1}{x} \right| = \frac{4x^2 + 1}{x} = 4x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Os pontos críticos de ℓ em $(0, +\infty)$ são dados pela equação

$$\ell(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0,$$

cujas única solução é $x = \frac{1}{2}$. Agora notamos que

- $\ell'(x) < 0$ em $(0, \frac{1}{2})$, logo ℓ é decrescente nesse intervalo.
- $\ell'(x) > 0$ em $(\frac{1}{2}, +\infty)$, logo ℓ é crescente nesse intervalo.

Em virtude do critério da primeira derivada podemos concluir que o mínimo absoluto de $\ell(x)$ é obtido no ponto $x = \frac{1}{2}$ com valor igual a $\ell(\frac{1}{2}) = 4$.

Questão 5: (2 pontos)

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$(a) \int (x+1) \cos(x^2 + 2x + 5) dx \qquad (b) \int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

Solução:

(a) Fazendo a substituição $u = x^2 + 2x + 5$ tem-se $du = 2(x+1)dx$, ou seja $(x+1)dx = \frac{1}{2}du$. Pela método de substituição segue que

$$\int (x+1) \cos(x^2 + 2x + 5) dx = \frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(x^2 + 2x + 5) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Fazendo $u = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ e $dv = x dx$ temos

$$du = -\frac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{dx}{x^2 + 1}, \quad \text{e} \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Pelo método de integração por partes segue que

$$\begin{aligned} \int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right) dx &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2 + 1} dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2} \int \left(1 - \frac{1}{x^2 + 1}\right) dx \\ &= \frac{x^2}{2} \arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$