**Nome completo:** ______________________________ **DRE:** ____________

**Professor no SIGA/Horário:** ______________________________ / ____________

## I- Questão Objetiva (B)

**Questão 1:** (3 pontos)

(1.1) A reta $y = 3x + 1$ é tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(1, 4)$ e, além disso, intersepta o mesmo gráfico no ponto $(3, f(3))$. O valor de $f(3)$ é

(a) 12
(b) 10
(c) 8
(d) 6

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(b)}}$.

(1.2) Seja $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que $f(1) = f(4) < 0$, $f(3) > 0$, $f'(3) = 0$ e $f''(x) < 0$ em $(1, 4)$.

(a) $f$ tem pelo menos duas raízes.
(b) $f$ tem exatamente duas raízes e seu valor máximo absoluto é $f(3)$.
(c) $f$ assume seu valor máximo absoluto em dois pontos distintos, sendo esse valor igual a $f(3)$.
(d) $f'$ é crescente no intervalo $(1, 4)$.

A afirmação correta para qualquer função $f$, como no enunciado, é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(b)}}$.

(1.3) O valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^3} \int_1^x \text{sen}^2(t-1)\ln(t+\sqrt{e}-1)dt$ é

(a) $\frac{3}{2}$
(b) 1
(c) $\frac{1}{6}$
(d) $\frac{1}{12}$

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(c)}}$.

(1.4) Seja $\mathcal{R}$ a região finita do plano, delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 4$. O volume do sólido de revolução obtido ao girar a região $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = 3$ é representado pela expressão integral:

(a) $\displaystyle 12\pi \int_0^3 \sqrt{y}dy$.

(b) $\displaystyle \pi \int_0^4 (3-\sqrt{y})^2 dy$.

(c) $\displaystyle 12\pi \int_0^4 \sqrt{y}dy$.

(d) $\displaystyle \pi \int_0^4 (3+\sqrt{y})^2 dy$.

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(c)}}$.

(1.5) Sejam

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx \quad \text{e} \quad J = \int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{9x+2}}dx.$$

Considere as seguintes afirmações:

(a) $I$ é convergente e $J$ é divergente.

(b) $I$ e $J$ são convergentes.

(c) $I$ é divergente e $J$ é convergente.

(d) $I$ e $J$ são divergentes.

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(d)}}$.

**Solução:**

(1.1) Resposta: (b).

Substituindo $x = 3$ na reta tem-se $f(3) = 3 \cdot 3 + 1 = 10$

(1.2) Resposta: (b).

Pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos uma raiz em cada uma dos intervalos $(1,3)$ e $(3,4)$. Caso exista uma terceira raiz, O Teorema de Rolle implicaria em dois pontos com derivada nula, o que é impossível uma vez que $f'$ é decrescente em virtude da $f'' < 0$ em $(1,4)$. Portanto, existem exatamente duas raízes de $f$ em $[1,4]$. Finalmente, o $x = 3$ é ponto de máximo local em virtude do critério da segunda derivada ($f''(3) < 0$) e como é o único ponto crítico, então $f(3)$ é o valor máximo absoluto de $f$ em $[1,4]$.

(1.3) Resposta: (c).

$L := \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{(x-1)^3} \displaystyle\int_1^x \operatorname{sen}^2(t-1)\ln(t+\sqrt{e}-1)dt \to \dfrac{0}{0}$ (forma indeterminada). Pela regra de L'Hôspital e o Teorema fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x-1)\ln(x+\sqrt{e}-1)}{3(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{3}\lim_{x\to 1^+} \frac{\operatorname{sen}^2(x-1)}{(x-1)^2} \lim_{x\to 1^+} \ln(x+\sqrt{e}-1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ln(e^{1/2}) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(1.4) Resposta: (c).

A parábola $y = x^2$ se decompões em duas funções na variável $y \in [0,4]$, a saber $x = -\sqrt{y}$ e $x = \sqrt{y}$. Aplicando a fórmula dos discos para o cálculo de volume obtemos:

$$V = \pi \int_0^4 \left[(3+\sqrt{y})^2 - (3-\sqrt{y})^2\right]dy = 12\pi \int_0^4 \sqrt{y}dy.$$

(1.5) Resposta: (d).

Note que o integrando $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ é contínuo em $(0,1]$ e é descontínuo em 0 com $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$. Assim, a integral $I$ é imprópria. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx .$$

Fazendo a substituição $u = \ln(x)$, temos que $du = \frac{1}{x}dx$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$ e $x = a \Rightarrow u = \ln(a)$. Daí, obtemos

$$\lim_{a\to 0^+} \int_{\ln(a)}^0 u\, du = \lim_{a\to 0^+} \left.\frac{u^2}{2}\right|_{\ln(a)}^0 = \lim_{a\to 0^+} \frac{-\ln^2(a)}{2} = -\infty .$$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

A integral $J$ é também imprópria, pois o domínio de integração da função contínua $\frac{1}{\sqrt{9x+2}}$ é $(1,+\infty)$ e diverge pelo critério de comparação com a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}dx = +\infty$.

## II- Questões Discursivas

**Questão 2:** (2 pontos)

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 16}{(x^2+1)(x-a)} & \text{se } x \neq a, \\ b & \text{se } x = a. \end{cases}$$

(a) Determine para quais valores de $a$ a função $f$ possui, pelo menos, um assíntota vertical.

(b) Determine as assíntotas horizontais de $f$, caso existam.

(c) Determine quais valores de $a$ e $b$, tornam a função $f$ é contínua em todo $\mathbb{R}$.

**Solução:**

(a) Escrevemos $\dfrac{2x^3 - 16}{(x^2+1)(x-a)} = \dfrac{2(x^3 - 8)}{(x^2+1)(x-a)} = 2\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+1)(x-a)}$, $x \neq a$. Esta função racional possui uma única raiz real no numerador $(x = 2)$ e uma única raiz real no denominador $(x = a)$. Portanto, para qualquer $a \neq 2$ teremos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de $f$, uma vez que o numerador e denominador, respectivamente, verificam:

$$\lim_{x\to a}(x-2)(x^2+2x+4) = (a-2)(a^2+2a+4) \neq 0$$

e

$$\lim_{x\to a}(x^2+1)(x-a) = 0.$$

(b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3 - 16}{(x^2+1)(x-a)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2 - 16/x^3}{(1+1/x^2)(1-a/x)} = \frac{2-0}{(1+0)(1-0)} = 2,$$

logo a reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de $f$.

(c) Para todo $x \neq a$, $f$ é racional e bem definida, logo é contínua. Para verificar a continuidade de $f$ no ponto $a$ a reta $x = a$ não pode ser uma assíntota vertical; portanto, em virtude do item (a), temos que $a = 2$. Além disso,

$$b = f(2) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+1)(x-2)} = 2\frac{4+4+4}{4+1} = \frac{24}{5}.$$

**Questão 3:** (2 pontos)
Considere a curva no plano cartesiano que satisfaz $x^2 - 5xe^y + 3e^{2y} + 1 = 0$. Sabendo que $y$ está definida implicitamente como função de $x$ numa vizinhança do ponto $(1, 0)$, determine o valor de $y'(1)$

**Solução:**
Derivando implicitamente $y$ com respeito a $x$ temos

$$2x - [5e^{y(x)} + 5xe^{y(x)}y'(x)] + 3e^{2y(x)}2y'(x) = 0.$$

Pondo $x = 1$ e $y(1) = 0$ obtemos

$$2 - [5 + 5y'(1)] + 6y'(1) = -3 + y'(1) = 0;$$

assim $y'(1) = 3$.

**Questão 4:** (2 pontos)
Considere uma reta vertical (paralela ao eixo $OY$) que intercepta os gráficos

$$y = \frac{x^2+1}{x} \quad \text{e} \quad y = -3x$$

nos pontos $P$ e $Q$, respectivamente. Sabendo que o comprimento $L$ do segmento $\overline{PQ}$ é o menor possível, determine o valor de $L$.

**Solução:**
O comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é dado pela expressão

$$\ell(x) = \left|\frac{x^2+1}{x} + 3x\right| = \left|\frac{4x^2+1}{x}\right|, \quad x \neq 0$$

Notemos que $\ell(x) = \ell(-x)$, logo é suficiente encontrar o valor mínimo absoluto de $\ell$ no domínio $x > 0$, onde

$$\ell(x) = \left|\frac{4x^2+1}{x}\right| = \frac{4x^2+1}{x} = 4x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Os pontos críticos de $\ell$ em $(0, +\infty)$ são dados pela equação

$$\ell(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0,$$

cuja única solução é $x = \frac{1}{2}$. Agora notamos que

- $\ell'(x) < 0$ em $(0, \frac{1}{2})$, logo $\ell$ é decrescente nesse intervalo.
- $\ell'(x) > 0$ em $(\frac{1}{2}, +\infty)$, logo $\ell$ é crescente nesse intervalo.

Em virtude do critério da primeira derivada podemos concluir que o mínimo absoluto de $\ell(x)$ é obtido no ponto $x = \frac{1}{2}$ com valor igual a $\ell\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

**Questão 5:** (2 pontos)

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int (x+1)\cos(x^2+2x+5)\,dx$ (b) $\displaystyle\int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

**Solução:**

(a) Fazendo a substituição $u = x^2 + 2x + 5$ tem-se $du = 2(x+1)dx$, ou seja $(x+1)dx = \frac{1}{2}du$. Pela método de substituição segue que

$$\int (x+1)\cos(x^2+2x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\text{sen}(u) + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+2x+5) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Fazendo $u = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ e $dv = xdx$ temos

$$du = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{dx}{x^2+1}, \quad \text{e} \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Pelo método de integração por partes segue que

$$\begin{aligned}\int x\arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\ &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$