Nome completo: ______________________________ **DRE:** ____________

Professor no SIGA/Horário: ______________________________/____________

I- Questão Objetiva (A)

Questão 1: (3 pontos)

(1.1) A reta $y = 3x - 1$ é tangente ao gráfico da função $y = f(x)$ no ponto $(1, 2)$ e, além disso, intersepta o mesmo gráfico no ponto $(3, f(3))$. O valor de $f(3)$ é

(a) 8
(b) 6
(c) 5
(d) 4

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(a)}}$.

(1.2) Seja $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ tal que $0 < f(1) < f(4)$, $f(3) < 0$, $f'(3) = 0$ e $f''(x) > 0$ em $(1, 4)$.

(a) f tem exatamente duas raízes e seu valor mínimo absoluto é $f(3)$.
(b) f tem pelo menos duas raízes.
(c) f assume seu valor mínimo absoluto em dois pontos distintos, sendo esse valor igual a $f(3)$.
(d) f' é decrescente em $(1, 4)$.

A afirmação correta para qualquer função f, como no enunciado, é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(a)}}$.

(1.3) O valor de $\displaystyle\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2}\int_1^x \operatorname{sen}(t-1)\ln(t+e^3-1)dt$ é

(a) $\frac{1}{2}$
(b) $\frac{3}{2}$
(c) 2
(d) 3

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(b)}}$.

(1.4) Seja $\mathcal{R}$ a região finita do plano, delimitada pelas curvas $y = x^2$ e $y = 1$. O volume do sólido de revolução obtido ao girar a região $\mathcal{R}$ em torno da reta $x = 2$ é representado pela expressão integral:

(a) $\pi \displaystyle\int_0^1 (2 - \sqrt{y})^2 dy.$
(b) $8\pi \displaystyle\int_0^1 \sqrt{y} dy.$
(c) $\pi \displaystyle\int_0^1 (2 + \sqrt{y})^2 dy.$
(d) $8\pi \displaystyle\int_0^2 \sqrt{y} dy.$

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(b)}}$.

(1.5) Sejam

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(x)}{x} dx \quad \text{e} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} dx.$$

Considere as seguintes afirmações:

(a) I é convergente e J é divergente.
(b) I e J são convergentes.
(c) I é divergente e J é convergente.
(d) I e J são divergentes.

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(c)}}$.

Solução:

(1.1) Resposta: (a).
Substituindo $x = 3$ na reta tem-se $f(3) = 3 \cdot 3 - 1 = 8$

(1.2) Resposta: (a).
Pelo Teorema do Valor Intermediário existe pelo menos uma raiz em cada uma dos intervalos $(1, 3)$ e $(3, 4)$. Caso exista uma terceira raiz, O Teorema de Rolle implicaria em dois pontos com derivada nula, o que é impossível uma vez que f' é crescente em virtude da $f'' > 0$ em $(1, 4)$. Portanto, existem exatamente duas raízes de f em $[1, 4]$. Finalmente, o $x = 3$ é ponto de mínimo local em virtude do critério da segunda derivada ($f''(3) > 0$) e como é o único ponto crítico, então $f(3)$ é o valor mínimo absoluto de f em $[1, 4]$.

(1.3) Resposta: (b).
$L := \lim_{x \to 1^+} \frac{1}{(x-1)^2} \int_1^x \operatorname{sen}(t-1) \ln(t + e^3 - 1) dt \to \frac{0}{0}$ (forma indeterminada). Pela regra de L'Hôspital e o Teorema fundamental do Cálculo segue que

$$\begin{aligned} L &= \lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1) \ln(x + e^3 - 1)}{2(x-1)} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \to 1^+} \frac{\operatorname{sen}(x-1)}{(x-1)} \lim_{x \to 1^+} \ln(x + e^3 - 1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \ln(e^3) = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

(1.4) Resposta: (b).
A parábola $y = x^2$ se decompões em duas funções na variável $y \in [0, 1]$, a saber $x = -\sqrt{y}$ e $x = \sqrt{y}$. Aplicando a fórmula dos discos para o cálculo de volume obtemos:

$$V = \pi \int_0^1 \left[(2 + \sqrt{y})^2 - (2 - \sqrt{y})^2 \right] dy = 8\pi \int_0^1 \sqrt{y} dy.$$

(1.5) Resposta: (c).

Note que o integrando $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ é contínuo em $(0,1]$ e é descontínuo em 0 com $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = +\infty$. Assim, a integral I é imprópria. Portanto,

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{x}dx = \lim_{a\to 0^+} \int_a^1 \frac{\ln(x)}{x}dx\ .$$

Fazendo a substituição $u = \ln(x)$, temos que $du = \frac{1}{x}dx$, $x = 1 \Rightarrow u = 0$ e $x = a \Rightarrow u = \ln(a)$. Daí, obtemos

$$\lim_{a\to 0^+} \int_{\ln(a)}^0 u\ du = \lim_{a\to 0^+} \frac{u^2}{2}\bigg|_{\ln(a)}^0 = \lim_{a\to 0^+} \frac{-\ln^2(a)}{2} = -\infty\ .$$

Portanto, a integral imprópria é divergente.

A integral J é também imprópria, pois o domínio de integração da função contínua $\frac{1}{x^2+3x+2}$ é $(0,+\infty)$ e converge pelo critério de comparação com a integral $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx < +\infty$.

II- Questões Discursivas

Questão 2: (2 pontos)

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e considere a função

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 16}{(x^2+1)(x-a)} & \text{se } x \neq a, \\ b & \text{se } x = a. \end{cases}$$

(a) Determine para quais valores de a a função f possui, pelo menos, um assíntota vertical.

(b) Determine as assíntotas horizontais de f, caso existam.

(c) Determine quais valores de a e b, tornam a função f é contínua em todo $\mathbb{R}$.

Solução:

(a) Escrevemos $\dfrac{2x^3-16}{(x^2+1)(x-a)} = \dfrac{2(x^3-8)}{(x^2+1)(x-a)} = 2\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+1)(x-a)}$, $x \neq a$. Esta função racional possui uma única raiz real no numerador ($x = 2$) e uma única raiz real no denominador ($x = a$). Portanto, para qualquer $a \neq 2$ teremos que a reta $x = a$ é uma assíntota vertical do gráfico de f, uma vez que o numerador e denominador, respectivamente, verificam:

$$\lim_{x\to a}(x-2)(x^2+2x+4) = (a-2)(a^2+2a+4) \neq 0$$

e

$$\lim_{x\to a}(x^2+1)(x-a) = 0.$$

(b)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x^3-16}{(x^2+1)(x-a)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2-16/x^3}{(1+1/x^2)(1-a/x)} = \frac{2-0}{(1+0)(1-0)} = 2,$$

logo a reta $y = 2$ é assíntota horizontal do gráfico de f.

(c) Para todo $x \neq a$, f é racional e bem definida, logo é contínua. Para verificar a continuidade de f no ponto a a reta $x = a$ não pode ser uma assíntota vertical; portanto, em virtude do item (a), temos que $a = 2$. Além disso,

$$b = f(2) = \lim_{x\to\pm\infty} 2\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(x^2+1)(x-2)} = 2\frac{4+4+4}{4+1} = \frac{24}{5}.$$

Questão 3: (2 pontos)
Considere a curva no plano cartesiano que satisfaz $x^2 - 5xe^y + 3e^{2y} + 1 = 0$. Sabendo que y está definida implicitamente como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 0)$, determine o valor de $y'(1)$

Solução:
Derivando implicitamente y com respeito a x temos

$$2x - [5e^{y(x)} + 5xe^{y(x)}y'(x)] + 3e^{2y(x)}2y'(x) = 0.$$

Pondo $x = 1$ e $y(1) = 0$ obtemos

$$2 - [5 + 5y'(1)] + 6y'(1) = -3 + y'(1) = 0;$$

assim $y'(1) = 3$.

Questão 4: (2 pontos)
Considere uma reta vertical (paralela ao eixo OY) que intercepta os gráficos

$$y = \frac{x^2+1}{x} \quad \text{e} \quad y = -3x$$

nos pontos P e Q, respectivamente. Sabendo que o comprimento L do segmento $\overline{PQ}$ é o menor possível, determine o valor de L.

Solução:
O comprimento do segmento $\overline{PQ}$ é dado pela expressão

$$\ell(x) = \left|\frac{x^2+1}{x} + 3x\right| = \left|\frac{4x^2+1}{x}\right|, \quad x \neq 0$$

Notemos que $\ell(x) = \ell(-x)$, logo é suficiente encontrar o valor mínimo absoluto de ℓ no domínio $x > 0$, onde

$$\ell(x) = \left|\frac{4x^2+1}{x}\right| = \frac{4x^2+1}{x} = 4x + \frac{1}{x}, \quad x > 0.$$

Os pontos críticos de ℓ em $(0, +\infty)$ são dados pela equação

$$\ell(x) = 4 - \frac{1}{x^2} = 0, \quad x > 0,$$

cuja única solução é $x = \frac{1}{2}$. Agora notamos que

- $\ell'(x) < 0$ em $(0, \frac{1}{2})$, logo ℓ é decrescente nesse intervalo.
- $\ell'(x) > 0$ em $(\frac{1}{2}, +\infty)$, logo ℓ é crescente nesse intervalo.

Em virtude do critério da primeira derivada podemos concluir que o mínimo absoluto de $\ell(x)$ é obtido no ponto $x = \frac{1}{2}$ com valor igual a $\ell\left(\frac{1}{2}\right) = 4$.

Questão 5: (2 pontos)
Calcule as seguintes integrais indefinidas:

(a) $\displaystyle\int (x+1)\cos(x^2+2x+5)\,dx$ (b) $\displaystyle\int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx$

Solução:
(a) Fazendo a substituição $u = x^2 + 2x + 5$ tem-se $du = 2(x+1)dx$, ou seja $(x+1)dx = \frac{1}{2}du$. Pela método de substituição segue que

$$\int (x+1)\cos(x^2+2x+5)\,dx = \frac{1}{2}\int \cos(u)\,du = \frac{1}{2}\text{sen}(u) + C = \frac{1}{2}\text{sen}(x^2+2x+5) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

(b) Fazendo $u = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$ e $dv = x dx$ temos

$$du = -\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}\frac{1}{x^2}dx = -\frac{dx}{x^2+1}, \quad \text{e} \quad v = \frac{x^2}{2}.$$

Pelo método de integração por partes segue que

$$\begin{aligned}
\int x \arctan\left(\frac{1}{x}\right)\,dx &= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx \\
&= \frac{x^2}{2}\arctan\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{x}{2} - \frac{1}{2}\arctan(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$