Nome completo: ____ **DRE:** ______________

Professor no SIGA/Horário: __________________________________/________________

I- Questão Objetiva (B)

Questão 1: (3 pontos)

(1.1) A integral definida $\displaystyle\int_2^5 \frac{1}{\sqrt{\cos(x)+1}}dx$ é representada pelo limite:

(a) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\cos(2+i/n)+1}}$

(b) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\cos(2+2i/n)+1}}$

(c) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\cos(2+3i/n)+1}}$

(d) $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{\cos(2+3i/n)+1}}$

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(c)}}$.

(1.2) Seja $f(x) = \displaystyle\int_0^{\cos(x)} e^{1-t^2}dt$, $x \in \mathbb{R}$. A derivada de f é dada por

(a) $f'(x) = \cos(x)e^{\mathrm{sen}^2(x)}$.

(b) $f'(x) = \mathrm{sen}(x)e^{1-\cos^2(x)}$.

(c) $f'(x) = e^{\mathrm{sen}^2(x)}$.

(d) $f'(x) = -\mathrm{sen}(x)e^{\mathrm{sen}^2(x)}$.

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(d)}}$.

(1.3) Seja $\mathcal{R}$ a região finita do plano, delimitada pelas curvas $y = \sqrt{x}$, $y = 0$ e $x + 2y = 15$. A área dessa região é representada pela expressão integral:

(a) $\displaystyle\int_0^3 (15-2y-y^2)dy$

(b) $\displaystyle\int_0^{15} (\sqrt{x} + \tfrac{15-x}{2})dx$

(c) $\displaystyle\int_0^9 \sqrt{x}dx - \int_9^{15} \tfrac{15-x}{2}dx$

(d) $\displaystyle\int_0^3 (y^2+2y-15)dy$

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(a)}}$.

(1.4) Seja $F(x)$ uma função tal que $F(4) = \ln(20)$ e $F'(x) = \dfrac{3x-5}{x^2-2x-3}$, $x > 3$. Determine o valor de $F(7)$.

Resposta: $\boxed{\mathbf{10\ln(2) - \ln(5)}}$.

(1.5) Dada a integral $I = \int_0^1 x^{10}(2+\cos(x))dx$, considere as seguintes afirmações:

(a) $I > \int_0^1 (2+\cos(x))dx$.

(b) $I < \int_0^1 x^9(2+\cos(x))dx$.

(c) $I < \int_0^1 x^{10}dx$.

(d) $I < \int_0^1 x^{11}(2+\cos(x))dx$.

A afirmação correta é a apresentada na letra $\boxed{\textbf{(b)}}$.

Solução:

(1.1) Sabemos que se f é contínua em $[a,b]$, então

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i), \text{ com } x_i = a + i\frac{b-a}{n}.$$

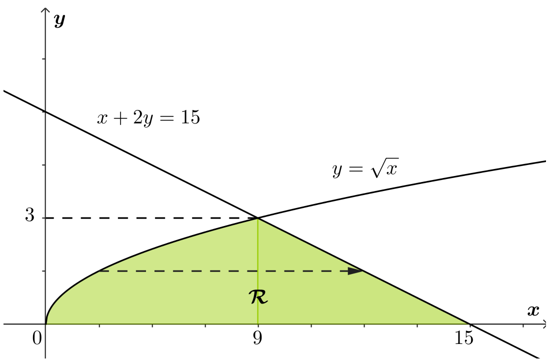
Portanto, tomando $a=2$, $b=5$ e $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\cos(x)+1}}dx$, a resposta certa é a letra (c).

(1.2) Pelo Teorema Fundamenta do Cálculo (parte I) e a regra da cadeia segue que

$$\frac{d}{dx}\int_0^{h(x)} f(t)dt = f[h(x)]h'(x).$$

Portanto, considerando $f(t) = e^{1-t^2}$ e $h(x) = \cos(x)$, a resposta certa é a letra (d).

(1.3) A região $\mathcal{R}$ está representada na figura a seguir.



A integração na variável y é mais simples. O seja, a área entre as curvas $x = y^2$ e $x = 15 - 2y$ no intervalo $[0,3]$ é representada pela integral

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^3 (15 - 2y - y^2)dy.$$

Portanto, a alternativa correta é a letra (a). A integração na variável x é dada pela expressão

$$A(\mathcal{R}) = \int_0^9 \sqrt{x}dx + \int_9^{15} \tfrac{15-x}{2}dx,$$

que não corresponde a nenhuma das alternativas dadas.

(1.4) De acordo com o enunciado, $F(x) = \int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}dx$. Usando o método de decomposição em frações parciais tem-se

$$\frac{3x-5}{x^2-2x-3} = \frac{3x-5}{(x+1)(x-3)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} = \frac{(A+B)x - 3A + B}{(x+1)(x-3)}.$$

Portanto, $A+B=3$ e $-3A+B=-5$, de onde concluí-se que $A=2$ e $B=1$. Assim,

$$F(x) = \int \frac{3x-1}{x^2-2x-3}dx = 2\int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{dx}{x+1} = 2\ln(|x+1|) + \ln(|x-3|) + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Por outro lado,

$$F(4) = 2\ln(5) + C = \ln(20) = \ln(5) + \ln(4) \Longrightarrow C = 2\ln(2) - \ln(5),$$

logo

$$F(x) = 2\ln(|x+1|) + \ln(|x-3|) + 2\ln(2) - \ln(5).$$

Finalmente, $F(7) = 2\ln(8) + \ln(4) + 2\ln(2) - \ln(5) = 10\ln(2) - \ln(5)$.

(1.5) Para todo $x \in (0,1)$ tem-se $x^{10}(2+\cos(x)) < x^9(2+\cos(x))$. Portanto, pelas propriedades de comparação da integral definida para funções contínuas tem-se

$$I = \int_0^1 x^{10}(2+\cos(x))dx < \int_0^1 x^9(2+\cos(x))dx,$$

logo a alternativa correta é a letra (b).

II- Questões Discursivas

Questão 2: (2 pontos)

O custo de produção semanal de q celulares, por parte de uma empresa, é dado pela expressão

$$C(q) = q(q^2 - 40q + 700).$$

Sabendo que o preço de venda é R\$ 1000 por unidade, determine a quantidade de celulares que **maximiza o lucro** da empresa e o correspondente valor do **lucro máximo**.

Observação: Lembramos que o lucro total é dado pela expressão $L(q) = R(q) - C(q)$, onde $R(q)$ é o rendimento das vendas.

Solução:

O rendimento das vendas é dado por $R(q) = 1000q$. Portanto, o lucro é dado pela função polinomial

$$L(q) = R(q) - C(q) = 1000q - q(q^2 - 40q + 700) = -q(q^2 - 40q - 300) = -q^3\left(1 - \frac{40}{q} - \frac{300}{q^2}\right),$$

que portanto é contínua e diferenciável para todo $q \in \mathbb{R}$. Do ponto de vista da modelagem, o domínio de interesse é $[0, +\infty)$. Além disso $L(q)$ satisfaz:

$$L(0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{q \to +\infty} L(q) = \lim_{q \to +\infty} -q^3 \left(1 - \frac{40}{q} - \frac{300}{q^2}\right) = -\infty.$$

Devemos portanto procurar a existência de máximos locais de $L(q)$, bem como determinar om maior deles, em caso haver mais de um ponto de máximo local. Começamos procurando os pontos críticos da função lucro, obtidos através da equação:

$$\frac{dL}{dq}(q) = -3q^2 + 80q + 300 = -(q - 30)(3q + 10) = 0,$$

cujas raízes são $q_1 = 30$ e $q_2 = \frac{10}{3}$. A segunda raiz é negativa e portanto está fora do domínio considerado.

Estudamos a variação do sinal de $L'(q) = \frac{dL}{dq}(q)$ em torno do seu único ponto crítico no domínio considerado, a saber $q = 30$. Como $L'(10) = 80 > 0$ e $L'(40) = -1300 < 0$ segue que a função lucro é crescente no intervalo $(0, 30)$ e decrescente no intervalo $(30, +\infty)$. Assim, pelo critério da primeira derivada, $q = 30$ é o ponto de máximo local (neste caso absoluto) de $L(q)$, com lucro máximo correspondente $L(30) = \text{R\$}\,18.000$.

Questão 3: (2 pontos)

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

$$\text{(a)} \int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx \qquad\qquad \text{(b)} \int x^2 \ln(3x) dx$$

Solução:

(a) Observe que

$$\int \frac{e^x}{e^{2x} + 2e^x + 2} dx = \int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2 + 1} dx. \tag{1}$$

Considerando a mudança de variável $u = e^x + 1$, temos

$$\frac{du}{dx} = e^x \quad \text{e} \quad du = e^x dx.$$

Portanto, a integral (1) pode ser re-escrita como

$$\int \frac{e^x}{(e^x + 1)^2 + 1} dx = \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \operatorname{arctg}(u) + C = \operatorname{arctg}(e^x + 1) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(b) Considere a integração por partes com $u = \ln(3x)$ e $dv = x^2 dx$, ou seja,

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} dx \quad \text{e} \quad v = \frac{x^3}{3}.$$

Portanto,

$$\int x^2 \ln(3x) dx = \ln(3x) \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3x} dx = \ln(3x) \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \ln(3x) \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Questão 4: (2 pontos)

Seja $\mathcal{R}$ a região do plano delimitada pelas curvas $y = \tan(x)$, $x = \frac{\pi}{3}$ e $y = 0$. Determine o volume do sólido de revolução obtido pela rotação de $\mathcal{R}$ em torno da reta $y = 2$,

Solução:

De cordo com a fórmula de volume para um sólido de revolução, usando o método dos discos, temos

$$V(\mathcal{S}) = \pi \int_0^{\pi/3} \Big[r_2^2(x) - r_1^2(x)\Big] dx,$$

onde

$$r_2(x) = 2 \quad \text{e} \quad r_1(x) = 2 - \tan(x).$$

Assim,

$$\begin{aligned} V(\mathcal{S}) &= \pi \int_0^{\pi/3} \Big[4 - (2 - \tan(x))^2\Big] dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/3} \Big[4\tan(x) - \tan^2(x)\Big] dx \\ &= \pi \int_0^{\pi/3} \Big[4\tan(x) - \sec^2(x) + 1\Big] dx \\ &= \pi\Big(- 4\ln(\cos(x)) - \tan(x) + x)\Big)\Big|_0^{\pi/3} \\ &= \pi\Big(4\ln(2) - \sqrt{3} + \tfrac{\pi}{3}\Big). \end{aligned}$$

Questão 5: (2 pontos)

Determine o valor de $\alpha > 0$ tal que

$$\int_0^{+\infty} \Big(e^{-\alpha x} - \frac{\alpha}{1 + x^2}\Big) dx = 0.$$

Solução:

1) Observe que com a mudança de variável

$$u = -\alpha x \quad \Longrightarrow \quad du = -\alpha dx \quad \Longrightarrow \quad dx = -\frac{1}{\alpha} du,$$

a integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx = \lim_{t\to+\infty} \int_0^t e^{-\alpha x} dx = \lim_{t\to+\infty} \Big(-\frac{1}{\alpha}\int_0^{-t\alpha} e^u du\Big) = -\frac{1}{\alpha} \lim_{t\to+\infty} \Big(e^{-t\alpha} - 1\Big) = \frac{1}{\alpha}. \quad (2)$$

2) Por outro lado, a integral

$$-\alpha \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = -\alpha \lim_{t\to+\infty} \int_0^t \frac{1}{1 + x^2} dx = -\alpha \lim_{t\to+\infty} [\mathrm{arctg(t)} - \mathrm{arctg(0)}] = -\frac{\alpha\pi}{2}. \quad (3)$$

Finalmente, substituindo (2) e (3) na expressão integral inicial, tem-se

$$\frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha\pi}{2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$