Nome completo: ______________________________ **DRE:** ______________

(**B**)

Questão 1: (2 pontos)

(1.1) Seja $f : [0,4] \to \mathbb{R}$ uma função **contínua** tal que $f(0) = \frac{1}{2}$, $f(1) = 2$, $f(2) = -\frac{3}{2}$, $f(3) = \frac{3}{2}$ e $f(4) = -\frac{1}{2}$. Considere as seguintes afirmações:

(a) A reta $y = -2$ não se intersepta com o gráfico de f.

(b) A reta $y = \frac{3}{2}$ se intersepta com o gráfico de f exatamente 3 vezes.

(c) A reta $y = 2$ se intersepta apenas uma vez com o gráfico de f.

(d) A reta $y = \frac{3}{2}$ se intersepta com o gráfico de f pelo menos 3 vezes.

A afirmação correta para qualquer f como no enunciado é a apresentada na letra **(d)**.

(1.2) A equação $177x^9 + 7x - 177 = 0$

(a) não tem raízes reais.

(b) tem exatamente uma raiz real positiva, mas não tem uma raiz real negativa.

(c) tem pelo menos três raízes reais.

(d) tem exatamente uma raiz real negativa, mas não tem uma raiz real positiva.

A afirmação correta é a apresentada na letra **(b)**.

(1.3) A função $\dfrac{\sqrt{3x^2+5x-1}}{\alpha x^2 + \beta x + 3}$ terá **duas** assíntotas horizontais distintas se e somente se

(a) $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$.

(b) $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$.

(c) $\alpha = 0$ e $\beta = 0$.

(d) $\alpha \neq 0$ e $\beta = 0$.

A afirmação correta é a apresentada na letra **(b)**.

(1.4) Um recipiente em formato cônico é construído com altura fixa de $60\,cm$. A circunferência da base mede $31,40\,cm$ com um possível erro de $0,1\,cm$. Dê uma estimativa para o erro no cálculo do volume da peça (use nas contas a aproximação $\pi \approx 3,14$).

Resposta: $10\,cm^3$.

Solução:

(1.1) Como $f(0) = \frac{1}{2} < \frac{3}{2} < 2 = f(1)$ e f é contínua em $[0,4]$, o Teorema do Valor Intermediário garante que existe pelo menos um número $c_1 \in (0,1)$ tal que $f(c_1) = \frac{3}{2}$. De forma similar podemos argumentar que existe pelo menos um número $c_2 \in (1,2)$ tal que $f(c_1) = \frac{3}{2}$. Portanto, em vista do anterior e que $f(3) = \frac{3}{2}$, pode-se afirmar que a reta $y = \frac{3}{2}$ se intersepta com o gráfico de f pelo menos 3 vezes. Resposta: alternativa **(d)**.

(1.2) O polinômio $f(x) = 177x^9 + 7x - 177$ é contínuo em todo $\mathbb{R}$ e $f(x) < 0$ para todo $x \in (-\infty, 0]$, logo f não tem raízes nesse intervalo. Observamos que $f(0) = -177 < 0$ e $f(1) = 7 > 0$, portanto o Teorema do Valor Intermediário garante a existência de um número $c \in (0,1)$ tal que $f(c) = 0$, ou seja, c é uma raiz positiva de f. Por outro lado, como $f'(x) = 1593x^8 + 7 > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, f é estritamente crescente; logo só pode ter uma raiz real. Resposta: alternativa **(b)**.

(1.3) Estudamos, simultaneamente, os limites de f quando $x \to \pm\infty$. Valem as igualdades:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{3x^2+5x-1}}{\alpha x^2+\beta x+3} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}}{x\left(\alpha x+\beta+\frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{|x|\sqrt{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{x\left(\alpha x+\beta+\frac{3}{x}\right)}$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\alpha x+\beta+\frac{3}{x}}.$$

(I) Se $\alpha = \beta = 0$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \pm\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\frac{3}{x}} = \pm\frac{\sqrt{3+0-0}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}} = +\infty$; logo **não há** assíntota horizontal nesse caso.

(II) Se $\alpha \neq 0$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\alpha x+\beta+\frac{3}{x}} = \pm\frac{\sqrt{3+0-0}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty} \alpha x+\beta+0} = 0;$$

logo f teria **uma única** assíntota horizontal nesse caso: $y = 0$.

De acordo com análise feita em (I) e (II), só nos resta a possibilidade $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. Nesse caso,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \pm\frac{\sqrt{3+\frac{5}{x}-\frac{1}{x^2}}}{\alpha x+\beta+\frac{3}{x}} = \pm\frac{\sqrt{3+0-0}}{\beta+0} = \pm\frac{\sqrt{3}}{\beta};$$

logo f teria **duas** assíntotas horizontais: $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{\beta}$.

Assim, a alternativa correta é a **(b)**.

(1.4) O volume do cone de altura fixa $h = 60\,cm$ e raio da base r é dado pela fórmula

$$V(r) = \frac{1}{3}\pi r^2 60 = 20\pi r^2.$$

Denotando o comprimento do círculo base por $\ell = 2\pi r$ temos que

$$V(\ell) = 20\frac{\ell^2}{4\pi} = \frac{5\ell^2}{\pi}.$$

Pela definição de diferenciais: $dV = V'(\ell)\,d\ell = \frac{10\ell}{\pi}\,d\ell$.

Do enunciado temos que $d\ell = \frac{1}{10}\,cm$ no cálculo da medida $\ell = 31,40\,cm$. Substituindo esses valores na fórmula de dV temos $dV = \frac{31,40}{\pi} \approx 10\,cm^3$.

Questão 2: (2 pontos)

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(\boldsymbol{a}x)}{5^x - 1} & \text{se } x < 0, \\ \frac{x^2-4x+3}{|x-1|} & \text{se } 0 \leq x < 1, \\ \boldsymbol{b} & \text{se } x = 1, \\ x^{\frac{\boldsymbol{c}}{x-1}} & \text{se } x > 1. \end{cases}$

Determine o valor das constantes reais $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ que tornam f contínua em todo $\mathbb{R}$.

Solução:

Denotamos

$$f_1(x) = \frac{\operatorname{sen}(ax)}{5^x - 1}, \quad f_2(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 1|} \quad \text{e} \quad f_3(x) = x^{\frac{c}{x-1}}$$

e observamos que f_1, f_2 e f_3 são contínuas nos intervalos $(-\infty, 0)$, $[0, 1)$ e $(1, +\infty)$, respectivamente. Apenas resta estudar a continuidade nos pontos $x = 0$ e $x = 1$. Estudamos primeiro os limites laterais em torno de $x = 0$ e observamos que a função f_1 (no caso $a \neq 0$), representa uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$ quando $x \to 0^-$. Usando a regra de L'Hôspital tem-se

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen}(ax)}{5^x - 1} = \lim_{x \to 0^-} \frac{a \cos(ax)}{5^x \ln(5)} = \frac{a}{\ln(5)}.$$

Pelo lado direito de $x = 0$ vale

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 1|} = \frac{3}{|-1|} = 3 = f(0).$$

Então, para f ser contínua em $x = 0$ deve valer a igualdade

$$\boxed{\tfrac{a}{\ln(5)} = 3 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = 3\ln(5) = \ln(125).}$$

Agora estudamos a continuidade em $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{x^2 - 4x + 3}{|x - 1|} = \lim_{x \to 1^-} \frac{(x - 1)(x - 3)}{-(x - 1)} = \lim_{x \to 1^-} -(x - 3) = 2.$$

Por outro lado, quando $x > 1$, a função f_3 (no caso $c \neq 0$) representa uma forma indeterminada do tipo 1^∞, que tratamos do modo a seguir

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} x^{\frac{c}{x-1}} = \lim_{x \to 1^+} e^{c \frac{\ln(x)}{x-1}} = e^{c \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x}} = e^c,$$

onde foi usada a regra de L'Hôspital para calcular o limite do expoente. Portanto, para termos a continuidade no ponto $x = 1$ devem valer as igualdades

$$2 = f(0) = b = e^c,$$

logo

$$\boxed{\boldsymbol{b} = 2 \quad \text{e} \quad \boldsymbol{c} = \ln(2).}$$

Questão 3: (2 pontos)

Considere a curva plana determinada pela equação $y^2 = x + \ln\left(\frac{y}{x}\right)$. Sabendo que a variável y é dada implicitamente em função de x próximo do ponto $Q = (1, 1)$, determine a equação da reta tangente ao gráfico dessa curva no ponto Q.

Solução:

Como sabemos que y é dada implicitamente em função de x próximo do ponto $Q = (1, 1)$ posemos assumir que $y = y(x)$ quando x está muito próximo de 1, ou seja, $x \in (1 - \delta, 1 + \delta)$ com δ pequeno. Pela regra da cadeia segue que

$$\begin{aligned} 2y(x)y'(x) &= 1 + \frac{x}{y(x)}\left(\frac{y(x)}{x}\right)' \\ &= 1 + \frac{x}{y(x)}\frac{y'(x)x - y(x)}{x^2} \\ &= 1 + \frac{y'(x)x - y(x)}{xy(x)}. \end{aligned} \tag{1}$$

Substituindo $x = 1$ em (1) temos

$$2y(1)y'(1) = 1 + \frac{y'(1) \cdot 1 - y(1)}{1 \cdot y(1)}$$

e usando que $y(1) = 1$ tem-se

$$2y'(1) = 1 + y'(1) - 1 \iff y'(1) = 0.$$

Portanto, a reta tangente é uma reta horizontal que passa pelo ponto $Q = (1, 1)$; consequentemente com equação $y = 1$.

Questão 4: (2 pontos)

A superfície de um cubo oco, de aresta $5\,cm$, é feita de um material que se **encolhe** uniformemente a uma taxa constante de $7\,cm^2/s$. Determine com que taxa está diminuindo o volume do cubo no momento em que sua aresta mede $4\,cm$.

Solução:

Se $a(t)$ representa a aresta do cubo no instante de tempo t, a área da superfície e o volume do cubo variam com o tempo, respectivamente, da seguinte forma:

$$A(t) = 6a^2(t) \quad \text{e} \quad V(t) = a^3(t).$$

Do enunciado sabemos que $A'(t) = -7\,cm^2/s$, logo

$$A'(t) = 12a(t)a'(t) = -7.$$

Portanto, no instante t^* em que $a(t^*) = 4\,cm$ tem-se $a'(t^*) = -\frac{4}{48}$.

Finalmente, $V'(t) = 3a^2(t)a'(t)$, o que implica que em t^* vale

$$V'(t^*) = -3 \cdot 4^2 . \frac{7}{48} = -7.$$

Portanto, no instante t^*, o volume está diminuindo a uma taxa de $-7\, cm^3/s$.

Questão 5: (2 pontos)
Seja $f(x) = 5x^{2/3} + 2x^{5/3}$. Sabendo que $f'(x) = \frac{10(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}$ e $f''(x) = \frac{10(2x-1)}{9\sqrt[3]{x^4}}$ para todo $x \neq 0$, determine, caso existam:

(a) assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f;
(b) intervalos onde f é crescente e intervalos onde f é decrescente;
(c) máximos e mínimos locais de f;
(d) intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e intervalos onde o gráfico de f é côncavo para baixo;
(e) pontos de inflexão do gráfico de f.

Utilizando os resultados dos itens anteriores, esboce o gráfico de f.

Solução:

(a) Não há candidatos a assíntotas verticais porque a função está definida para todo $\mathbb{R}$ e é contínua.

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Big(\underbrace{5x^{2/3}}_{\to+\infty} + \underbrace{2x^{5/3}}_{\to+\infty}\Big) = +\infty.$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \Big(\underbrace{5x^{2/3}}_{\to+\infty} + \underbrace{2x^{5/3}}_{\to-\infty}\Big) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^{2/3}}_{\to+\infty} \Big(\underbrace{5+2x}_{\to-\infty}\Big) = -\infty.$$

Portanto, não há assíntotas horizontais.

(b)

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{-1/3} + \frac{10}{3}x^{2/3} = \frac{10}{3}x^{-1/3}(1+x) = \frac{10(1+x)}{3\sqrt[3]{x}}\,.$$

Sinal de f':

Intervalo	$10(1+x)$	$3\sqrt[3]{x}$	f'
$(-\infty,-1)$	$-$	$-$	$+$
$(-1,0)$	$+$	$-$	$-$
$(0,+\infty)$	$+$	$+$	$+$

Portanto, f é crescente em $(-\infty,-1) \cup (0,\infty)$ e decrescente em $(-1,0)$.

(c) O único ponto que anula f' é $x = -1$ e, além disso, f' **não existe** em $x = 0$, logo os pontos críticos de f são $\{-1, 0\}$. Como f' muda de positiva para negativa em torno de $x = -1$, este é ponto de máximo local com valor de $f(-1) = 3$. Por outro lado, como f' muda de negativa para positiva em torno de $x = 0$, este é um ponto de mínimo local com valor de $f(0) = 0$.

(d)

$$f''(x) = -\frac{10}{9}x^{-4/3} + \frac{20}{3}x^{-1/3} = \frac{10}{9}x^{-4/3}(2x-1) = \frac{10(2x-1)}{9\sqrt[3]{x^4}}\,.$$

Sinal de f'':

Intervalo	$10(2x-1)$	$9\sqrt[3]{x^4}$	f''
$(-\infty, 0)$	$-$	$+$	$-$
$\left(0, \frac{1}{2}\right)$	$-$	$+$	$-$
$(1/2, +\infty)$	$+$	$+$	$+$

Portanto, f é côncava para baixo em $(-\infty, 0) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$ e côncava para cima em $\left(\frac{1}{2}, \infty\right)$.

(e) f'' muda de sinal apenas em $x = \frac{1}{2}$ e f é contínua neste ponto, logo $x = \frac{1}{2}$ é o único ponto de inflexão com valor de $f(1/2) = 3\sqrt[3]{2}$.

As raízes de f são determinadas pela equação $5x^{2/3} + 2x^{5/3} = x^{2/3}(5 + 2x) = 0$, ou seja, são $\{-\frac{5}{2}, 0\}$. Considerando este fato e os itens anteriores, podemos esboçar o gráfico de f da seguinte forma: