1. (2 pontos)

(a) Calcule o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{9x^3 - 6x + 2\,\mathrm{sen}(3x)}{x^3}$.

Resolução.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{9x^3 - 6x + 2\,\mathrm{sen}(3x)}^{\to 0}}{\underbrace{x^3}_{\to 0}} = \text{(L'Hôsp.)} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{27x^2 - 6 + 6\cos(3x)}^{\to 0}}{\underbrace{3x^2}_{\to 0}} = \text{(L'Hôsp.)} \lim_{x\to 0} \frac{\overbrace{54x - 18\,\mathrm{sen}(3x)}^{\to 0}}{\underbrace{6x}_{\to 0}}$$
$$= \text{(L'Hôsp.)} \lim_{x\to 0} \frac{54 - 54\cos(3x)}{6} = 0.$$

(b) Calcule o seguinte limite: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^x + 2/x}{7e^x + 5/x}$.

Resolução.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{e^x + 2/x}^{\div e^x}}{\underbrace{7e^x + 5/x}_{\div e^x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1 + \overbrace{\dfrac{2}{xe^x}}^{\to 0}}{7 + \underbrace{\dfrac{5}{xe^x}}_{\to 0}} = \frac{1}{7}.$$

---

2. (3 pontos)

(a) Sejam $f(x) = e^x + 5x^2$ e $g(x)$ uma função tal que $g(3) = 2$ e $g'(3) = 4$. Determine $(f \circ g)'(3)$.

Resolução.

$(f \circ g)'(3) = f'(g(3)) \cdot g'(3)$.
$f'(x) = e^x + 10x \Rightarrow f'(g(3)) = f'(2) = e^2 + 20 \Rightarrow f'(g(3)) \cdot g'(3) = (e^2 + 20)4 = 4e^2 + 80.$

(b) Considere a curva definida pela equação $xy^2 + \sqrt{xy} = 2$. Encontre a equação da reta tangente à curva no ponto $(1, 1)$.

Resolução.

Considerando y variável dependente de x, derivamos em relação a x (indicando por $'$) obtemos:

$$\frac{d}{dx}(xy^2 + \sqrt{x}\sqrt{y}) = \frac{d}{dx}(2) \Rightarrow y^2 + 2xyy' + \frac{1}{2\sqrt{x}}\sqrt{y} + \sqrt{x}\frac{1}{2\sqrt{y}}y' = 0$$

Substituindo $x = 1$ e $y = 1$: $1 + 2y' + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}y' = 0 \Rightarrow 2 + 4y' + 1 + y' = 0 \Rightarrow y'(1) = -\dfrac{3}{5}$.

Equação a reta tangente $\dfrac{y-1}{x-1} = y'(1) \Rightarrow \dfrac{y-1}{x-1} = -\dfrac{3}{5} \Rightarrow 5y - 5 = -3x + 3 \Rightarrow 3x + 5y - 8 = 0$

ou $y = -\dfrac{3}{5}x + \dfrac{8}{5}$.

(c) Seja b uma constante e seja $f(x) = \mathrm{sen}\,[\ln(1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x))] - bx^3$.
Encontre o valor de b para que a inclinação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $x = 1$ seja 5.

Resolução.

$$f'(x) = \cos[\ln(1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x))] \cdot [\ln(1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x))]' - 3bx^2$$
$$= \cos[\ln(1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x))] \cdot \frac{(1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x))'}{1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x)} - 3bx^2 = \cos[\ln(1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x))] \cdot \frac{(b\pi\cos(\pi x))}{1 + b\,\mathrm{sen}(\pi x)}.$$

$$\Rightarrow f'(1) = \cos\left[\ln\left(1 + b\overbrace{\operatorname{sen}\pi}^{=0}\right)\right] \cdot \frac{\left(b\pi\overbrace{\cos(\pi)}^{=-1}\right)}{1 + b\underbrace{\operatorname{sen}(\pi)}_{=0}} - 3b$$

$$= \cos(\ln 1)(b\pi\cos\pi) - 3b = \cos 0 \cdot (-b\pi) - 3b = -b(\pi + 3).$$

Então $f'(1) = 5 \Leftrightarrow -b(\pi + 3) = 5 \Leftrightarrow b = -\dfrac{5}{\pi + 3}$.

3. (2 pontos)

Uma pedra é jogada de uma altura de 160m. Um foco de luz está colocado também a 160m de altura, a uma distância de 10m da posição inicial da pedra. A altura da pedra após t segundos é $A(t) = -\frac{40}{10}t^2 + 160$ metros. Com que velocidade se moverá a sombra da pedra sobre o chão 2 segundos após a pedra ser jogada?

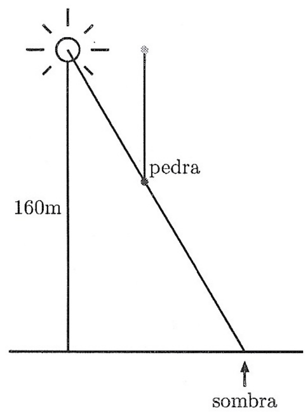


Figura 1

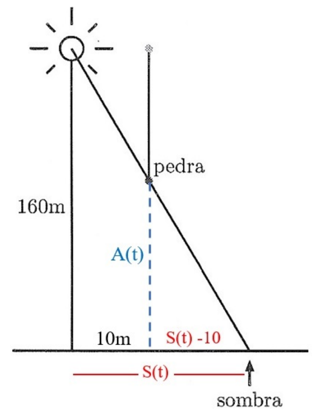


Figura 2

Resolução.

Denotando $S(t)$ o deslocamento da sombra da pedra a partir da posição da base da fonte (Figura 2) então seu deslocamento em relação ao local onde cairá a pedra é $S(t) - 10$. Então, pela semelhança dos triângulos retângulos temos:

$\dfrac{S(t)}{S(t) - 10} = \dfrac{160}{A(t)}$. Assim, $S(t) \cdot A(t) = 160 \cdot (S(t) - 10) \Rightarrow S(t) \cdot (160 - A(t)) = 1600$ (**i**).

Relação entre as velocidades da pedra e da sombra: denotando (') a derivação em relação a t.

$(S(t) \cdot (160 - A(t))' = 0 \Rightarrow S'(t)(160 - A(t)) - S(t)A'(t) = 0 \Rightarrow S'(t) = \dfrac{S(t)A'(t)}{160 - A(t)}$.

Para $t = 2$, $S'(2) = \dfrac{S(2)A'(2)}{160 - A(2)}$. (**ii**)

$A(2) = -\dfrac{49}{10} \cdot 4 + 160 = -\dfrac{98}{5} + 160 \Rightarrow 160 - A(2) = \dfrac{98}{5}$ (**iii**)

$A'(t) = -2t \cdot \dfrac{49}{10} = -\dfrac{49}{5}t \Rightarrow A(2)' = -\dfrac{49}{5} \cdot 2 = -\dfrac{98}{5} \cdot$ (**iv**)

De (i) e (ii), $S(2) = \dfrac{1600}{98/5} = \dfrac{1600 \cdot 5}{98} = \dfrac{4000}{49}$.(**v**)

De (ii) a (v), $S'(2) = \dfrac{(4000/49)(-98/5)}{98/5} = -\dfrac{4000}{49}\, m/s$.

4. (3 pontos) Seja $f(x) = \sqrt[5]{x^4}\left(\dfrac{x}{9} - \dfrac{1}{4}\right)$, com $f'(x) = \dfrac{x - 1}{5\sqrt[5]{x}}$ e $f''(x) = \dfrac{4x + 1}{25\sqrt[5]{x^6}}$. Determine, caso existam:

(a) assíntotas horizontais e verticais do gráfico de f;
(b) intervalos onde f é crecente e intervalos onde f é descrescente;
(c) pontos críticos de f;
(d) máximos locais e mínimos locais de f;
(e) intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e intervalos onde o gráfico de f é côncavo para baixo;
(f) pontos de inflexão do gráfico de f.
(g) Utilizando os resultados dos itens anteriores, esboce o gráfico de f.

Resolução.

(a) assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \underbrace{\underbrace{\sqrt[5]{x^4}}_{\to\infty}\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{4}\right)}_{\to\infty} = \infty.$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \underbrace{\sqrt[5]{x^4}}_{\to+\infty}\underbrace{\left(\frac{x}{9}-\frac{1}{4}\right)}_{\to-\infty} = -\infty.$$

Não há assítotas horizontais.
Não há candidata a assíntota vértical porque a função está definida para todo $\mathbb{R}$ e é contínua.

(b) intervalos onde f é crecente e intervalos onde f é descrescente:
Análise do sinal de $f'(x)$

valores de x:	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
sinal de $x-1$:	$-$	$-$	$-$	0	$+$
sinal de $5\sqrt[5]{x}$:	$-$	0	$+$	$+$	$+$
sinal de $f'(x)$:	$+$	$\nexists$	$-$	0	$+$

f é crescente em $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$ e decrescente em $(0,1)$.

(c) pontos críticos de f: $\{0,1\}$.

(d) máximos locais e mínimos locais de f: $x=1$ é minimo local; $x=0$ é mínimo local.

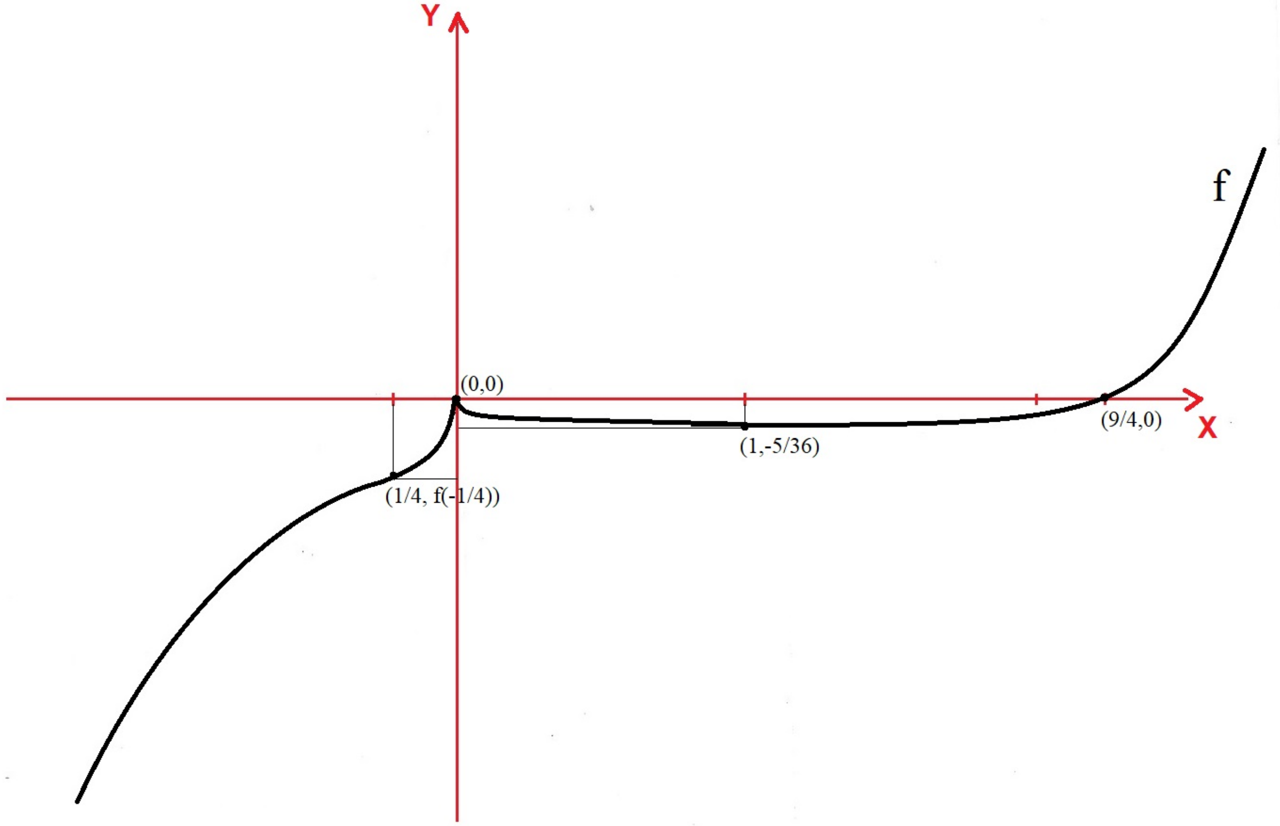
(e) intervalos onde o gráfico de f é côncavo para cima e intervalos onde o gráfico de f é côncavo para baixo:
Análise do sinal de $f''(x)$:
numerador $4x+1$: é zero para $x=-1/4$; em $(-\infty,-1/4)$ é negativo: em $(-1/4,+\infty)$ é positivo.
O denominador é zero em $x=0$ e positivo para os outros valores de x.
Então o sinal de $f''(x)$ é o sinal de $4x+1$ e não está definida para $x=0$.
Concavidade para cima ($f''(x)>0$): em $(-1/4,0)\cup(0,+\infty)$.
Concavidade para baixo ($f''(x)>0$): em $(-\infty,-1/4)$.

(Quadro para comparar com quem fez.)

valores de x:	$(-\infty,-1/4)$	$-1/4$	$(-1/4,0)$	0	$(0,+\infty)$
sinal de $4x+1$:	$-$	0	$+$	$+$	$+$
sinal de $25\sqrt[5]{x^6}$:	$+$	$+$	$+$	0	$+$
sinal de $f''(x)$:	$-$	0	$+$	$\nexists$	$+$

(f) pontos de inflexão do gráfico de f.
Ponto de inflexão: $\left(-1/4, f(-\frac{1}{4})\right)$, pois $f''(x)$ muda o sinal somente na vizinhança de $x=-1/4$.

(g) Utilizando os resultados dos itens anteriores, esboce o gráfico de f.
Interseções com eixo OX $(0,0)$ e $(9/4,0)$.
Valor mínimo local: $f(1)=\frac{1}{9}-\frac{1}{4}=\frac{4-9}{36}=-\frac{5}{36}$; ponto do gráfico $(1,-\frac{5}{36})$.
Ponto de inflexão: $(-\frac{1}{4}, f(-\frac{1}{4}))$; $f(-\frac{1}{4})=\sqrt[5]{\frac{1}{256}}\cdot(-\frac{1}{36}-\frac{1}{4})=-\frac{13}{36}\sqrt[5]{\frac{1}{256}}$.



Fim